

# Einführung in die Graphentheorie

## Diskrete Strukturen

Winter Semester 2012

# 342 207

Prof. Armin Biere

Institut für Formale Modelle und Verifikation

Johannes Kepler Universität, Linz

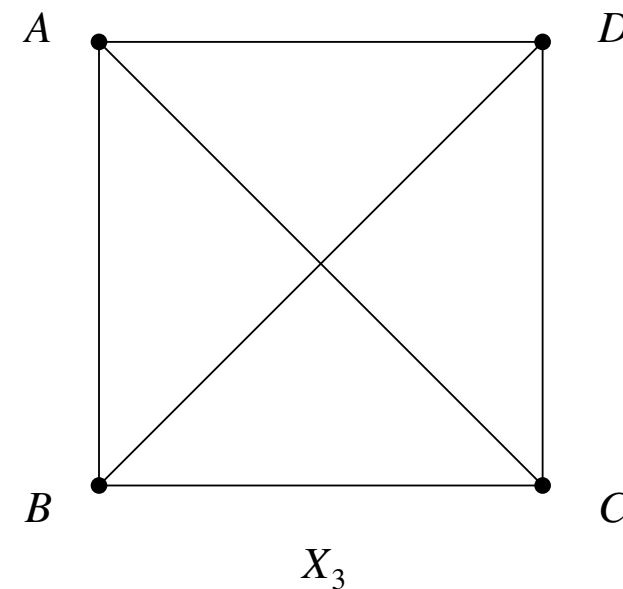
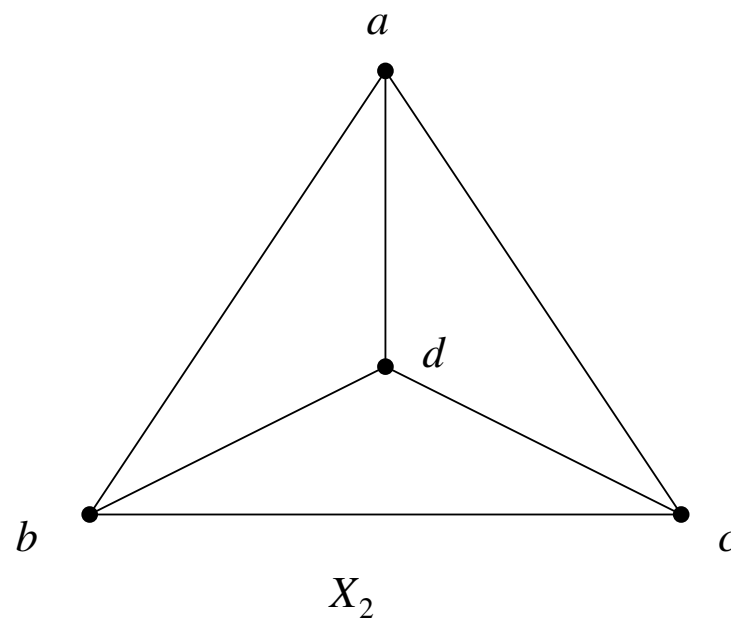
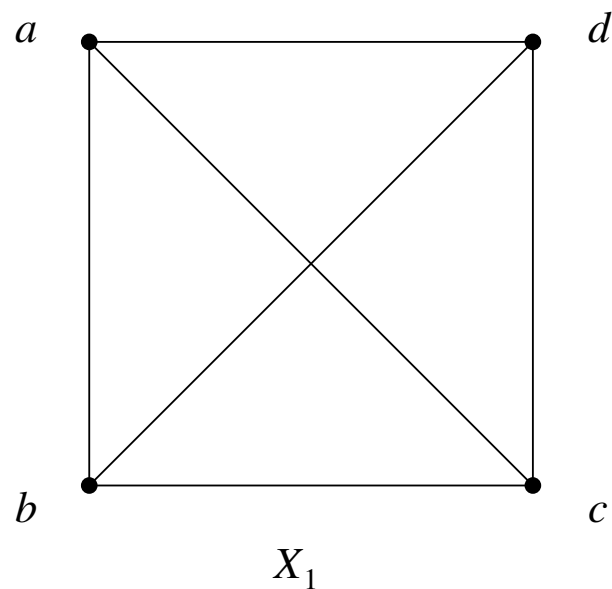
<http://fmv.jku.at/ds>

- Kapitel 8, *Mathematik explorativ*. J. Mühlbacher, G. Pilz, M. Widi. Trauner Verlag.
- Kapitel 8, Skriptum *Mathematik 2 für Informatiker (Algebra)*.  
J. Mühlbacher, G. Pilz, M. Widi.
- Kapitel 8, *Discrete Mathematics and its Applications*. K. Rosen. McGraw Hill.

**Def.** Ein *ungerichteter Graph*  $X$  besteht aus einer Menge  $V = V(X)$ , den *Knoten* von  $X$  und einer Menge  $E = E(X)$  von (ungeordneten) Paaren  $\{x, y\}$  verschiedener Elemente aus  $V$ , den *Kanten* von  $X$ .

**Bsp.**

$X_1 = (V_1, E_1)$  mit  $V_1 = \{a, b, c, d\}$ ,  $E_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$



**Def.** Eine Abbildung  $\varphi$  von der Menge  $A$  in die Menge  $B$ , geschrieben  $\varphi: A \rightarrow B$ , heißt *injektiv* gdw. aus  $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$  folgt  $a_1 = a_2$ , für alle  $a_1, a_2 \in A$ .

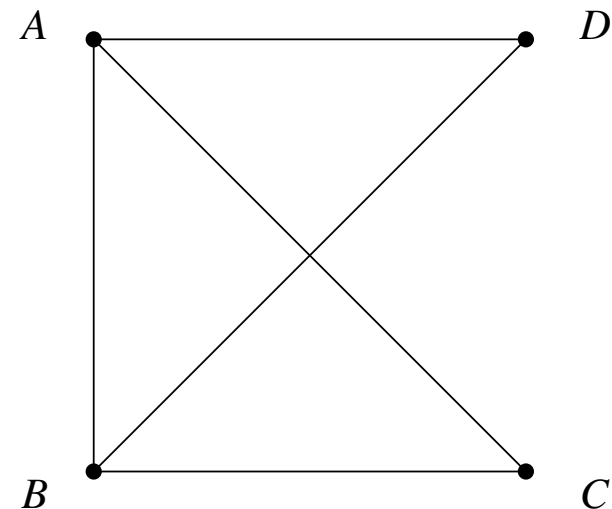
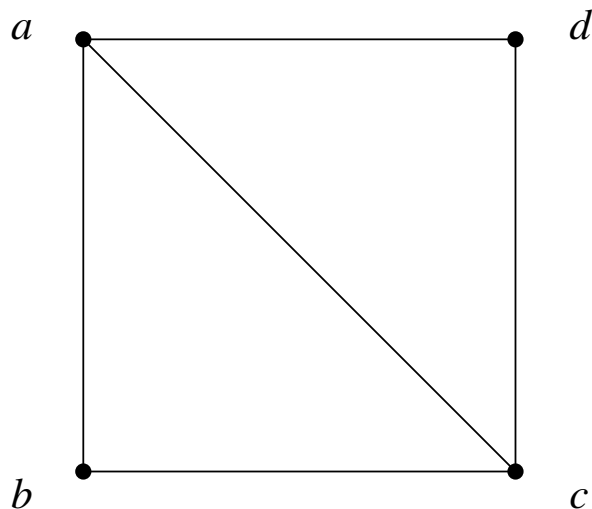
**Def.**  $\varphi: A \rightarrow B$  heißt *surjektiv* gdw. es für alle  $b \in B$  ein  $a \in A$  gibt, so dass  $\varphi(a) = b$ .

**Def.** Eine Abb.  $\varphi: A \rightarrow B$  heißt *bijektiv* gdw. sie injektiv und surjektiv ist.

**Def.** Seien  $X_1 = (V_1, E_1)$ ,  $X_2 = (V_2, E_2)$  Graphen. Eine bijektive Abb.  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  heißt *Isomorphismus* von  $X_1$  auf  $X_2$  wenn folgendes gilt:

$$\{x, y\} \in E_1 \quad \text{gdw.} \quad \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E_2 \quad \varphi \text{ Homomorphismus}$$

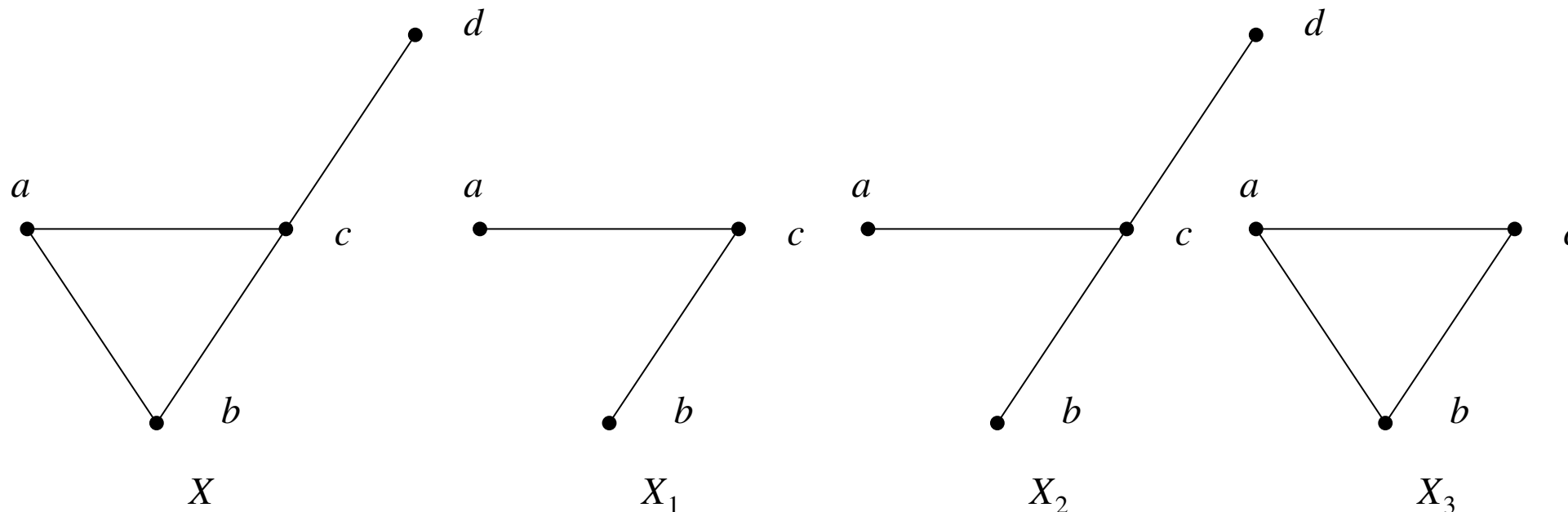
Falls so ein Isomorphismus existiert heißen  $X_1$  und  $X_2$  *isomorph*.



**Def.** Ein Graph  $X_1 = (V_1, E_1)$  heißt *Teilgraph* von  $X = (V, E)$ , wenn  $V_1 \subseteq V$  und  $E_1 \subseteq E$ .

**Def.** Ein Teilgraph von  $X$  ist *spannender* Teilgraph von  $X$ , wenn  $V_1 = V$ .

**Def.** Sind in einem Teilgraphen von  $X$  alle Kanten  $E$  von  $X$  vorhanden, welche nur Knoten aus  $V_1$  beinhalten, so nennt man  $X_1$  einen *gesättigten* Teilgraphen von  $X$ , bzw. dass  $X$  von  $X_1$  aufgespannt wird.



**Def.** Der Grad  $d(x)$  eines Knoten  $x \in V(X)$  ist die Anzahl Kanten, mit diesem Knoten.

**Def.** Ein Knoten  $x$  mit  $d(x) = 0$  heißt *isolierter* Knoten.

**Def.** Ein Knoten  $x$  mit  $d(x) = 1$  heißt *Endknoten*.

**Def.** Hat jeder Knoten den gleichen Grad  $d$ , so heißt der Graph *regulär* mit Grad  $d$ .

**Satz** 
$$\sum_{x \in V(X)} d(x) = 2 \cdot |E(X)|$$

**Bew.** In der Summe der Grade liefert jede Kante genau zwei mal einen Zähler.

**Def.** Eine *Kantenfolge* von  $x_1$  nach  $x_n$  besteht aus  $n - 1$  Kanten

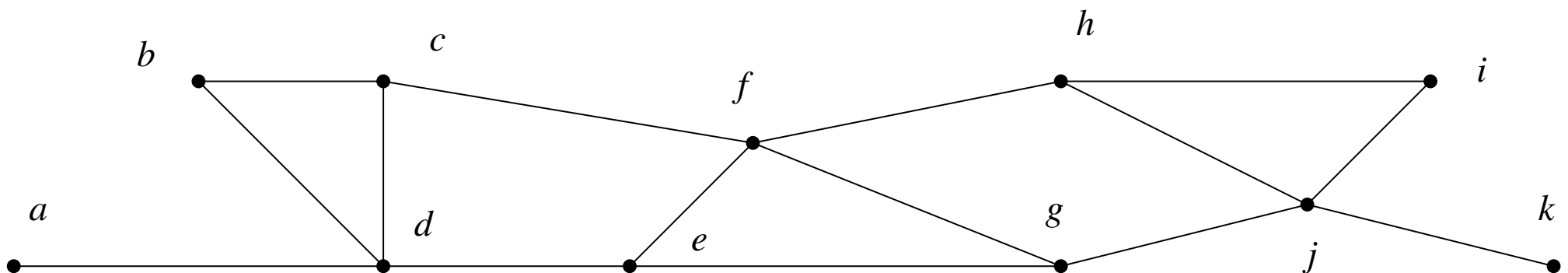
$$\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\},$$

so dass je zwei aufeinanderfolgende Kanten einen gemeinsamen Knoten haben.

**Def.** Eine *Kantenfolge* ist *geschlossen* wenn  $x_1 = x_n$ , sonst *offen*.

**Def.** Ein *Weg* ist eine (offene) Kantenfolge aus unterschiedlichen Knoten.

**Def.** Ein *Kreis* ist eine geschl. Kantenfolge mit unterschiedlichen Knoten  $x_1, \dots, x_{n-1}$ .



**Satz** Jede Kantenfolge von  $x_1$  nach  $x_n$  enthält einen Weg von  $x_1$  nach  $x_n$ .

**Bew.** Man lässt Umwege, die den gleichen Knoten mehrmals besuchen, einfach weg.

**Def.** Die Anzahl Kanten in einer Kantenfolge ist ihre *Länge*.

**Def.** Ein Weg von  $x$  nach  $y$  mit minimaler Länge heißt *kürzester Weg*.

**Def.** Zwei Knoten  $x$  und  $y$  sind *verbunden*, wenn sie Endpunkte einer Kantenfolge sind.

**Anm.** Ein kürzester Weg zwischen  $x$  und  $y$  existiert, wenn  $x$  und  $y$  verbunden sind.

**Anm.** Der kürzeste Weg ist aber nicht eindeutig, d.h. es kann mehrere geben.



**Def.** Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei seiner Knoten verbunden sind.

**Def.** Die *Komponente*  $K(x)$  eines Knotens  $x$  besteht aus allen mit  $x$  verbundenen Knoten.

**Satz** Sind  $x \neq y$  zwei Knoten des Graphen und  $K(x) \cap K(y) \neq \emptyset$ , so ist  $K(x) = K(y)$ .

**Bew.** Sei  $z \in K(x) \cap K(y)$ , dann gibt es einen Weg von  $x$  nach  $z$  und einen von  $z$  nach  $y$ .

Diese beiden Wegen lassen sich zusammensetzen zu einem Weg von  $x$  nach  $y$ .

Somit sind  $x$  und  $y$  verbunden und damit  $K(x) = K(y)$ . q.e.d.

**Anm.** “Verbunden zu Sein” ist eine Äquivalenzrelation mit Komponenten als Klassen.

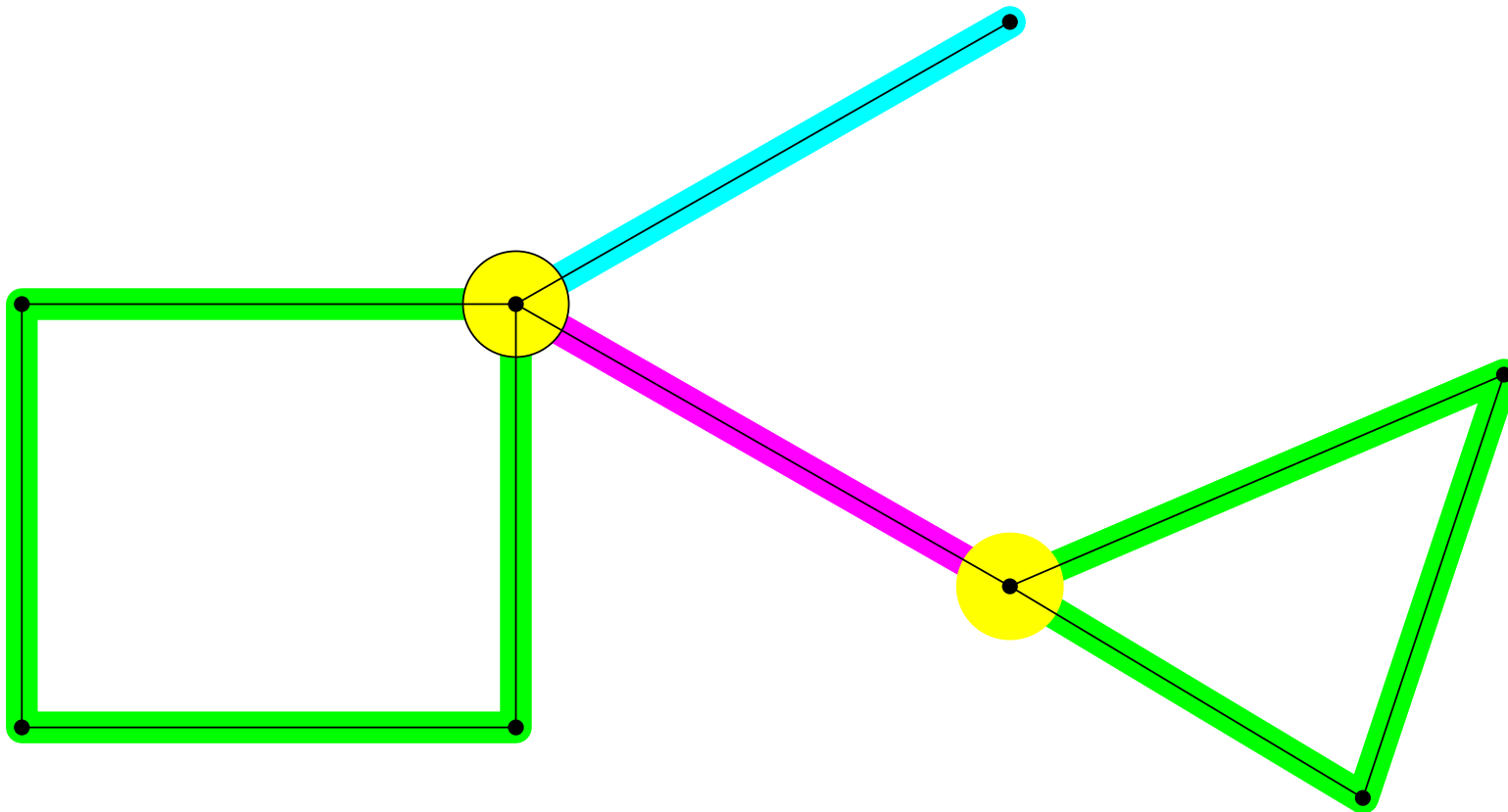
**Anm.** Oftmals wird davon ausgegangen, dass der Graph zusammenhängend ist.

**Def.** Sei  $X$  ein Graph und  $A \subseteq V(X)$ , so erhält man  $X - A$  durch *Streichen* von  $A$  in  $X$  mit

$$V(X - A) = V(X) - A$$

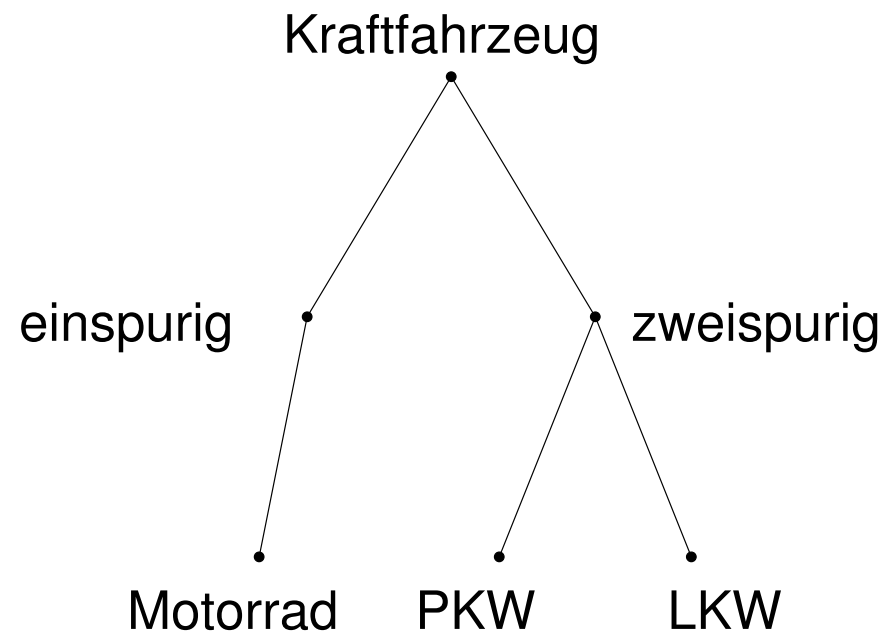
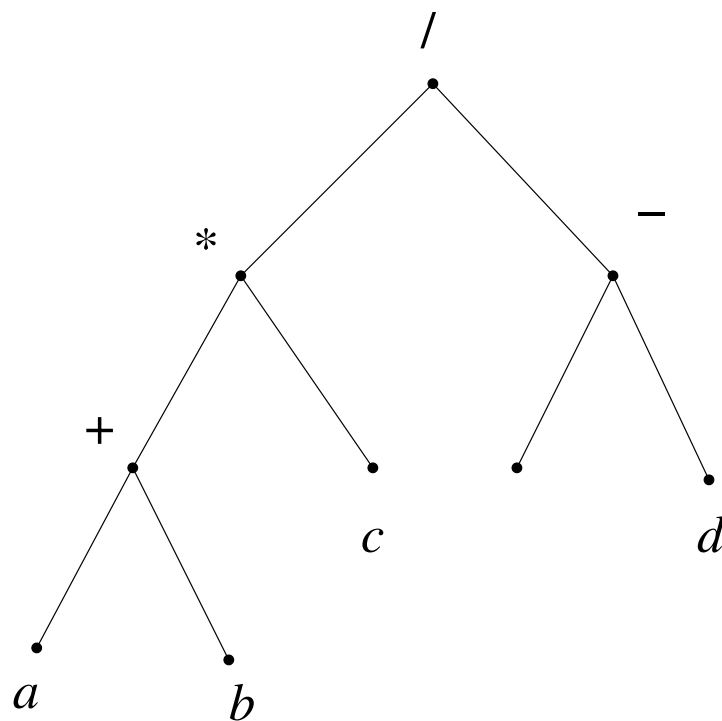
$$E(X - A) = E(X) - (E \times A) - (A \times E) = \{ \{x, y\} \mid \{x, y\} \in E(X), x \notin A \text{ und } y \notin A \}$$

**Def.** Ein Knoten  $x \in V(x)$  heißt *Artikulationspunkt* von  $X$  oder *Zerfällungsknoten*, wenn  $X - \{x\}$  mehr Komponenten hat als  $X$ .



**Def.** Ein zusammenhängender ungerichteter Graph ohne Kreis heißt *Baum*.

**Def.** Ist jede Komponente eines Graphen  $X$  ein Baum, so heißt  $X$  ein *Wald*.



**Satz** Folgende Aussagen sind für einen Graphen  $X$  äquivalent:

- (i)  $X$  ist ein Baum.
- (ii) Je zwei Knoten in  $X$  sind durch genau einen Weg in  $X$  verbunden.
- (iii)  $X$  ist zusammenhängend und  $|V(X)| = |E(X)| + 1$ .
- (iv)  $X$  besitzt keinen Kreis und  $|V(X)| = |E(X)| + 1$ .

**Bew.** In 4 Schritten: (i)  $\Rightarrow$  (ii), (ii)  $\Rightarrow$  (iii), (iii)  $\Rightarrow$  (iv), (iv)  $\Rightarrow$  (i).

(i)  $X$  ist ein Baum.

$X$  ist zusammenhängend.

Für zwei Knoten  $x$  und  $y$  gibt es mindestens einen Weg von  $x$  nach  $y$ .

Gäbe es einen zweiten Weg von  $x$  nach  $y$ , dann hätte  $X$  einen Kreis.

Solch einen zweiten Weg kann es also nicht geben, da ein Baum keinen Kreis hat.

(ii) Je zwei Knoten in  $X$  sind durch genau einen Weg in  $X$  verbunden.

(ii) Je zwei Knoten in  $X$  sind durch genau einen Weg in  $X$  verbunden.

Unmittelbar ergibt sich, dass  $X$  zusammenhängend ist.

Für  $|V(X)| \leq 2$  folgt die Aussage trivialerweise.

Wähle  $x, y \in V(X)$  mit  $\{x, y\} \in E(X)$ .

Nimmt man die Kante  $\{x, y\}$  weg so zerfällt  $X$  in disjunkte  $Y, Z$ .

Induktionsannahme

$$|V(X)| = |V(Y)| + |V(Z)| = (|E(Y)| + 1) + (|E(Z)| + 1) = |E(X)| + 2 - 1 = |E(X)| + 1$$

(iii)  $X$  ist zusammenhängend und  $|V(X)| = |E(X)| + 1$ .

(iii)  $X$  ist zusammenhängend und  $|V(X)| = |E(X)| + 1$ .

Schneide aus  $X$  sukzessive Endpunkte heraus.

Ist kein Knoten mehr übrig sind wir fertig, denn die entfernten Endpunkte waren immer nur durch einen Weg, mit den restlichen Knoten verbunden.

Ansonsten ist der resultierende Graph  $Y$  immer noch zusammenhängend.

Er erfüllt  $|V(Y)| = |E(Y)| + 1$ , und besitzt keine Endpunkte.

Mit der Grad-Formel erhält man:

$$2 \cdot |E(Y)| = \sum_{x \in V(Y)} d(x) \geq 2 \cdot |V(Y)| = 2 \cdot (|E(Y)| + 1) = 2 \cdot |E(Y)| + 2 \quad \textbf{Widerspruch!}$$

(iv)  $X$  besitzt keinen Kreis und  $|V(X)| = |E(X)| + 1$ .

(iv)  $X$  besitzt keinen Kreis und  $|V(X)| = |E(X)| + 1$ .

Seien  $X_1 \dots X_n$  die Komponenten von  $X$ .

Die Komponenten sind kreislos und zusammenhängend, also alle Bäume und es gilt:

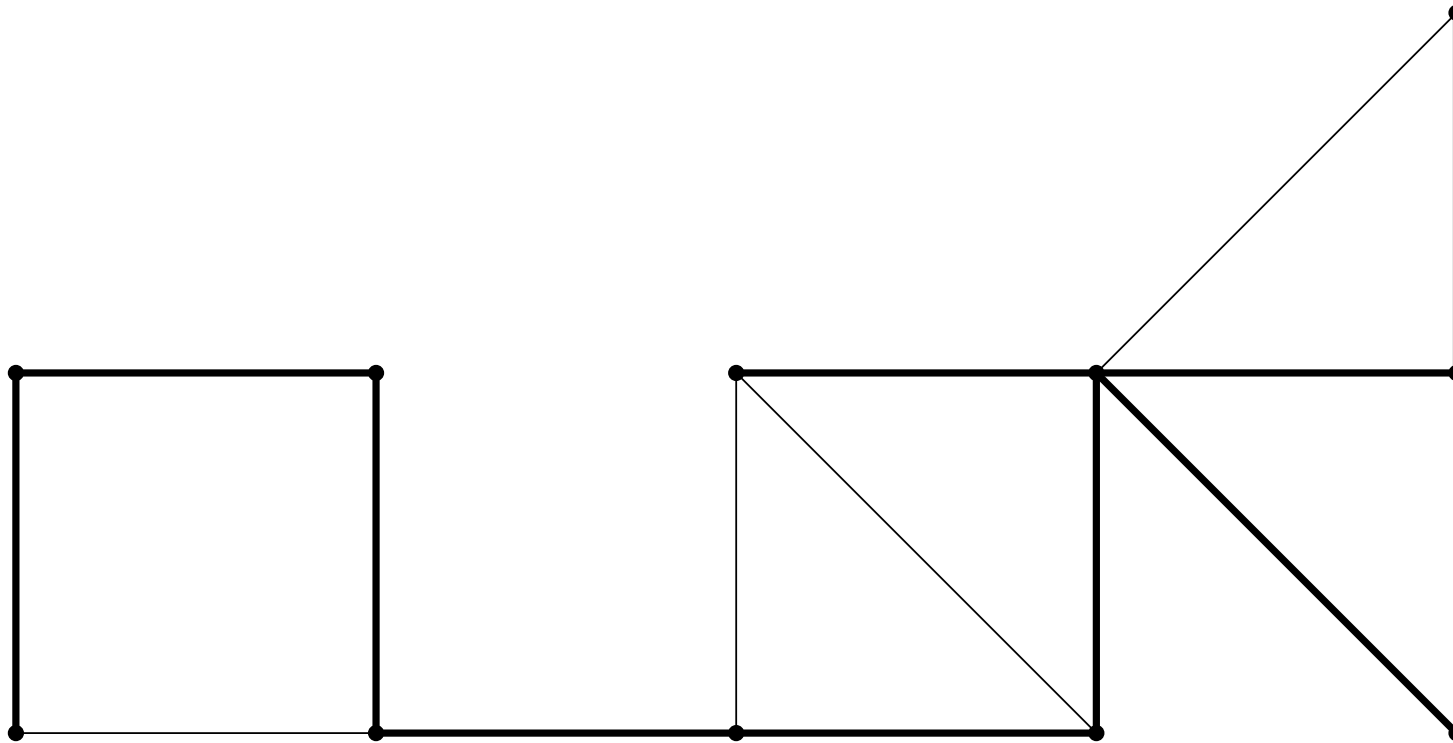
$$|V(X)| = \sum_{i=1}^n |V(X_i)| = \sum_{i=1}^n (|E(X_i)| + 1) = n + \sum_{i=1}^n |E(X_i)| = n + |E(X)|$$

Nach Voraussetzung muß deshalb  $n = 1$  sein.

(i)  $X$  ist ein Baum (kreislos und zusammenhängend)



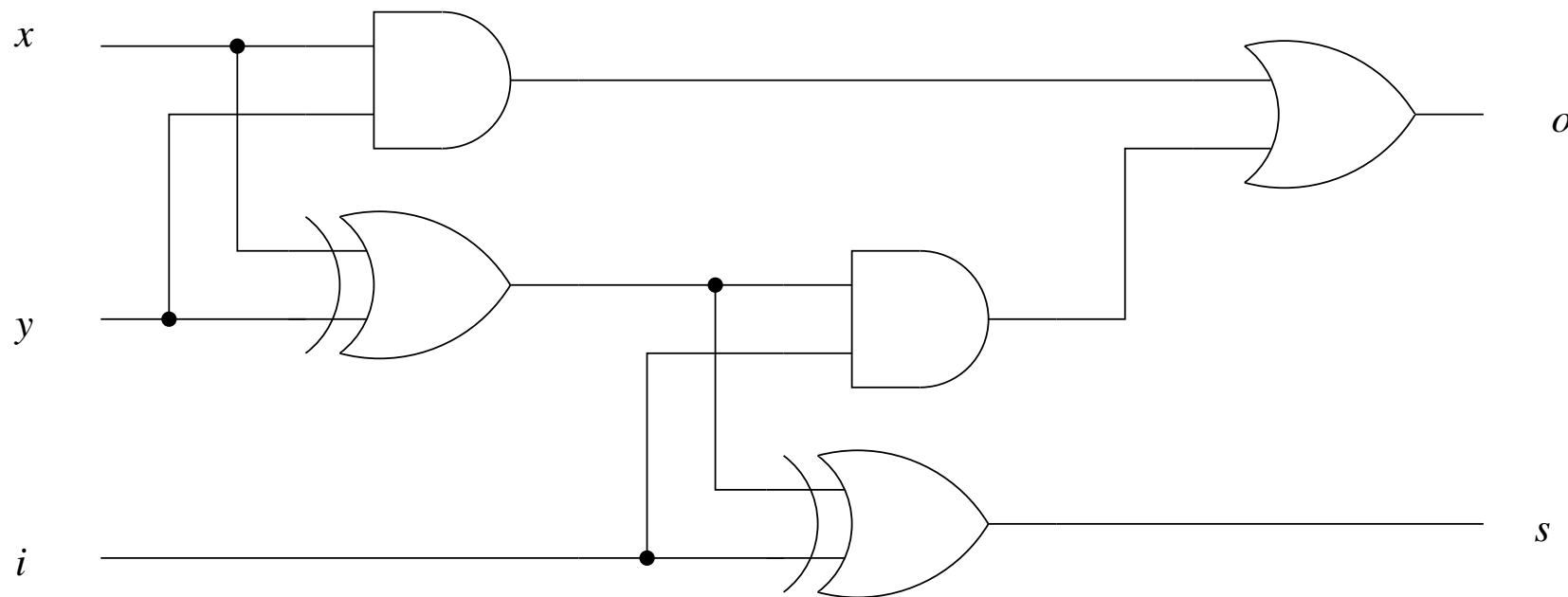
**Def.** Für einen zusammenhängenden Graphen  $X$  ist ein Teilgraph  $Y$  ein *Spannender Baum*, wenn  $Y$  ein Baum ist und  $V(X) = V(Y)$ .



**Anm.** Bei nicht zusammenhängenden Graphen ersetze “Baum” durch “Wald”.

**Frage** Wann ist  $Y$  gesättigt?

**Def.** Ein Hypergraph  $X = (V, E)$  besteht aus einer Menge von Knoten  $V = V(X)$  und einer Menge von Kanten  $E(X)$ , welche nichtleere Teilmengen von  $V$  beinhaltet, d.h.  $E \subseteq \mathbb{P}(V) - \emptyset$ .



Die Gatter dieses Schaltkreises sind (eigentlich gerichtete) Hyper-Kanten.

**Anm.** Man kann Hyper-Graphen durch Graphen simulieren, indem man entweder alle Knoten in einer Hyper-Kante paarweise verbindet, oder Knoten für Hyper-Kanten einführt.

**Def.** Ein *gerichteter Graph*  $X$  (kurz gGraph) besteht aus einer Menge  $V = V(X)$ , den Knoten von  $X$ , und einer Menge  $E = E(X)$  von geordneten Paaren  $(x, y)$  verschiedener Elemente aus  $V$ , den Kanten von  $X$ .  $E \subseteq V \times V$

**Anm.** Oft lässt man auch *Schleifen* und *Mehrfach-Kanten* zu.

**Anm.** Jeder gGraph entspricht einer binären Relation über  $V$  und umgekehrt, und ...

**Anm.** ... jeder ungerichtete Graph einer symmetrischen binären Relation.

**Def.** Zu einem gGraph  $X$  definiere seinen ungerichteten Graphen  $X^u$  als:

$$V^u = V \quad \text{und} \quad E^u = \{\{x, y\} \mid (x, y) \in E \text{ oder } (y, x) \in E\}$$

**Def.**

$$d^+(x) = |\{(x, y) \mid (x, y) \in E(X)\}|, \quad d^-(x) = |\{(y, x) \mid (y, x) \in E(X)\}| \quad d(x) = d^+(x) + d^-(x)$$

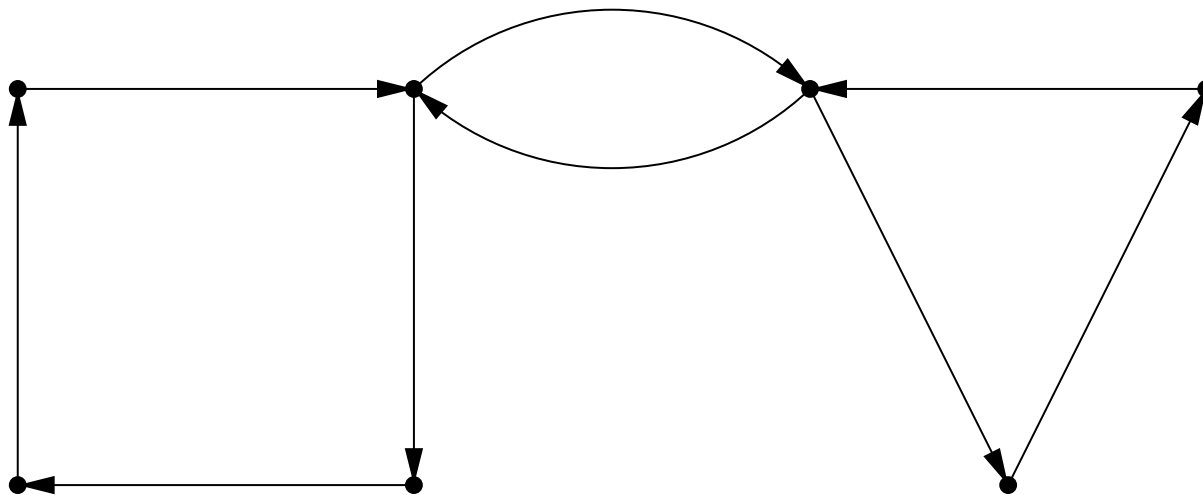
**Fakt**

$$\sum_{x \in V} d^+(x) = \sum_{x \in V} d^-(x) = |E|$$

**Def.** Gerichtete *gKantenfolge*, *gWeg*, und *gKreis* definiert analog zum ungerichteten Fall.

**Def.** *gGraph* heißt *stark zusammenhängend*, wenn alle Knoten durch *gWeg* verbunden.

**Anm.** Es muss also nicht nur einen Weg von  $x$  nach  $y$  sondern auch umgekehrt in einem *stark* zusammenhängenden *gGraph* auch einen Weg von  $y$  nach  $x$ .



**Def.** Eine *Stark Zusammenhängende Komponente* eines  $g$ Graphen  $X$  ist ein maximaler, stark zusammenhängender Teilgraph von  $X$ .

**Anm.** Statt kreislos spricht man bei  $g$ Graphen von *azyklisch*.

DAG = Directed Acyclic Graph.

**Satz** Die Stark Zusammenhängenden Komponenten partitionieren die Knoten von  $X$ .

**Bew.** Geg. zwei stark zusammenhängende Komponenten  $Y$  und  $Z$  mit  $x \in Y \cap Z$ .

Dann ist jeder Knoten  $y$  aus  $Y$  von  $x$  erreichbar und umgekehrt.

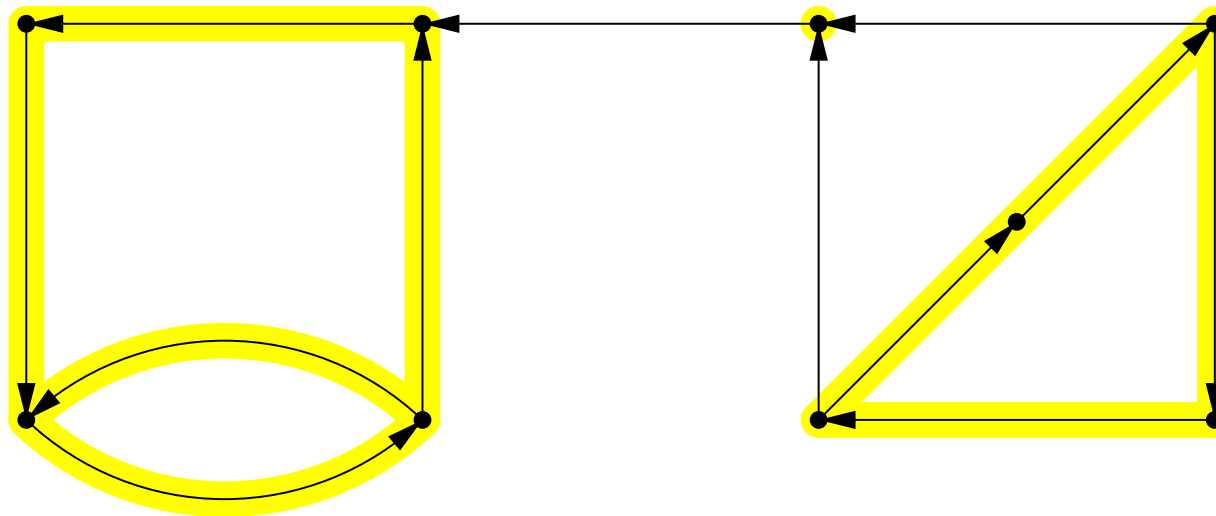
Dasselbe gilt für alle Knoten  $z \in Z$ .

Diese Wege verbinden alle  $y \in Y$  mit allen  $z \in Z$  und umgekehrt.

$X \cap Y$  ist ein stark zusammenhängender Teilgraph von  $X$ .

Also  $X = Y = Z$ , da  $Y$  und  $Z$  als stark zusammenhängende Komponenten, maximal sind.

**Satz** Ein gGraph ist stark zusammenhängend gdw.  $X$  zusammenhängend ist und jede Kante  $e \in E(X)$  auf einem gKreis in  $X$  liegt.



**Fakt** Fasst man alle Knoten einer stark zusammenhängenden Komponente zu einem Knoten zusammen, so erhält man einen gKreislosen gGraphen.

**Satz** (Topologisches Sortieren) Die Knoten  $x_1, \dots, x_n$  eines gKreislosen gGraphen lassen sich so anordnen, dass  $i < j$  aus  $(x_i, x_j) \in E$  folgt.

**Def.** Ein azyklischer gGraph  $X$  ist ein *gBaum* wenn  $d^-(x) = 0$  für genau einen Knoten  $x$ , den Wurzelknoten, und  $d^-(y) = 1$  für alle anderen Knoten  $y$ .

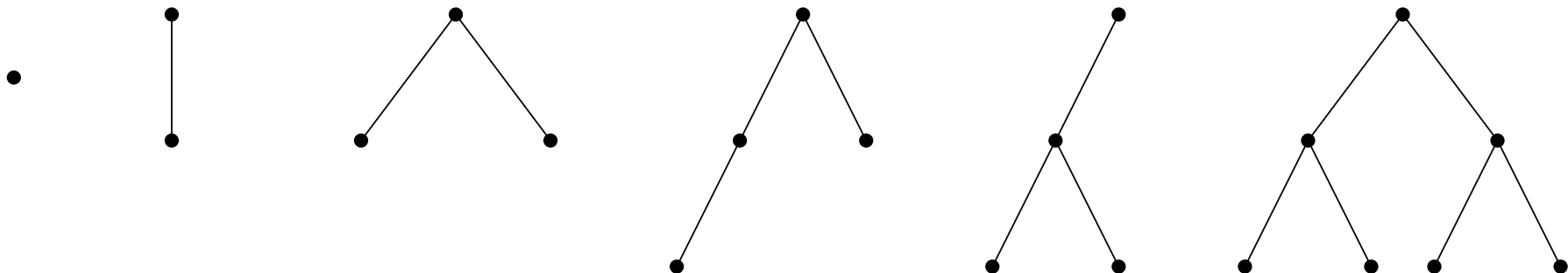
**Def.** Ein Endpunkt eines gBaumes heißt *Blatt*.

Genauer muss man für  $|V| \geq 2$  den Wurzelknoten ausnehmen

**Fakt** Der ungerichtete Graph  $X^u$  zu einem gBaum  $X$  ist ein Baum.

**Def.** In einem *Binärer gBaum* gilt  $d^+(x) \leq 2$ .

**Def.** Die *Höhe* eines gBaumes ist die Länge des längsten (g)Weges von der Wurzel zu einem Blatt.

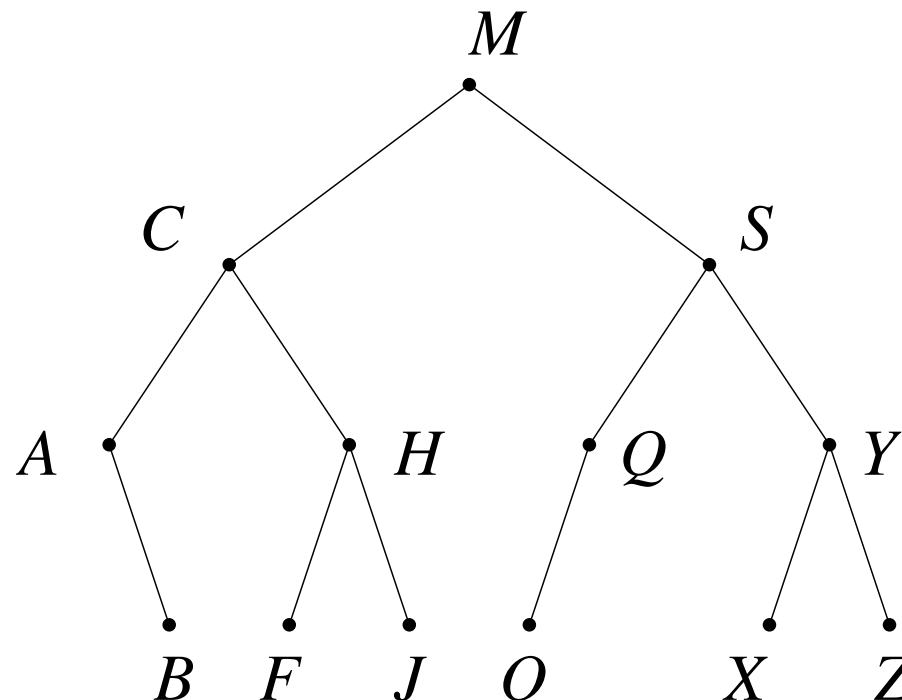


**Def.** Ein gBaum ist *balanciert*, wenn für jeden seiner Knoten gilt, dass sich die Höhe der Teilbäume mit seinen Kindern als Wurzeln höchstens um 1 unterscheiden.

**Anm.** Balancierte Bäume sind immer “niedrig”.

Logarithmisch hoch in  $|V|$

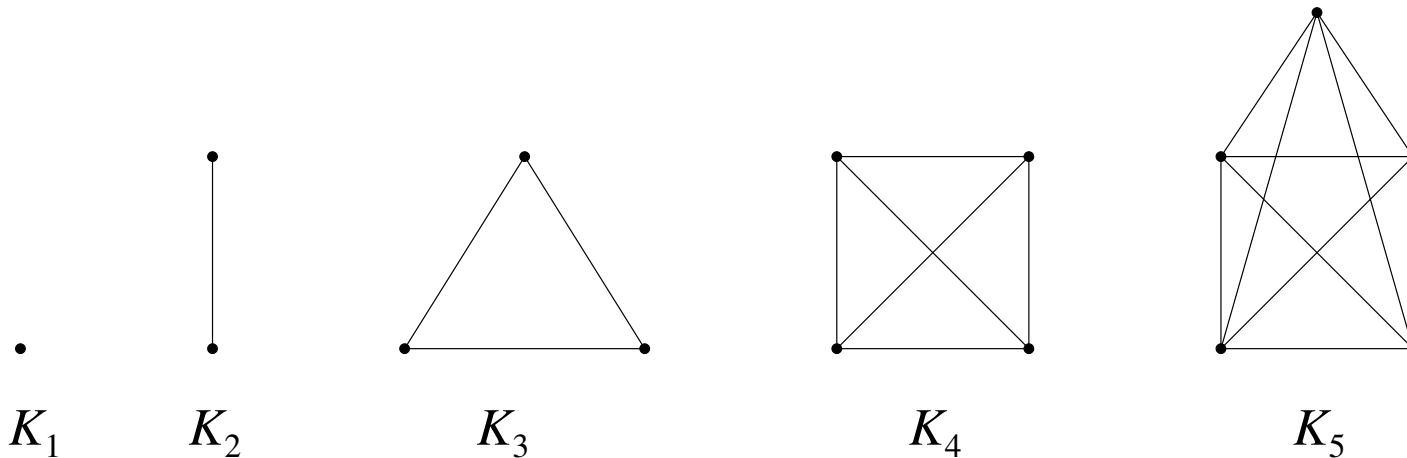
**Anm.** Benützt man Balancierte Bäume, um Informationen zu speichern, so sind sowohl das Suchen als auch das Einfügen effizient.





**Def.** Ein ungerichteter Graph heißt *vollständig* wenn  $E = \{\{x, y\} \mid x, y \in V\}$ .

**Fakt.** Ein vollständiger Graph hat  $n \cdot (n - 1) / 2$  Kanten.



**Def.** Der *Durchmesser* eines zusammenhängenden Graphen ist die Länge des längsten kürzesten Weges zwischen zwei Knoten.

Oder, wie lang ist ein Weg maximal um von einem Knoten zu einem anderen zu gelangen.

Wie lang kann ein Weg in einem Graphen in Relation zum Durchmesser sein?

**Def.** Eine  $k$ -Clique eines Graphen ist ein vollständiger Teilgraph.

**Anm.** Es ist schwierig zu bestimmen, ob ein Graph eine  $k$ -Clique besitzt.

Problem ist NP-vollständig

Was bedeutet, dass nur exponentielle Algorithmen bekannt sind

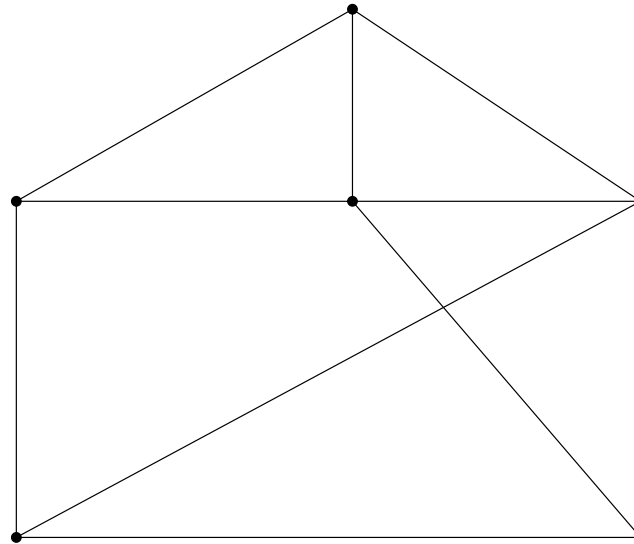
**Def.** Eine *Knotenüberdeckung* ist ein  $W \subseteq V$ , falls jede Kante ein  $x \in W$  besitzt.

**Fakt** Eine min. Knotenüberdeckung zu finden ist so schwer wie eine max. Clique.

Es gibt noch viele weitere NP-harte Probleme

In der Praxis trifft man häufig auf NP-harte Graphen-Probleme.

**Def.** Ein geschl. Kantenzug, der alle Knoten besucht, heißt *Hamilton'scher Kreis*.

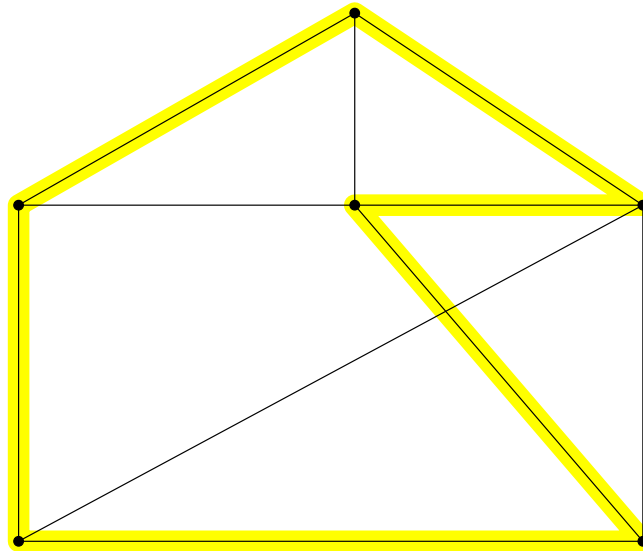


**Anm.** Es ist sehr schwierig, zu bestimmen, ob ein Hamilton'scher Kreis existiert.

Problem ist NP-vollständig

Im Worst-Case muss man alle Möglichkeiten durchprobieren

**Def.** Ein geschl. Kantenzug, der alle Knoten besucht, heißt *Hamilton'scher Kreis*.

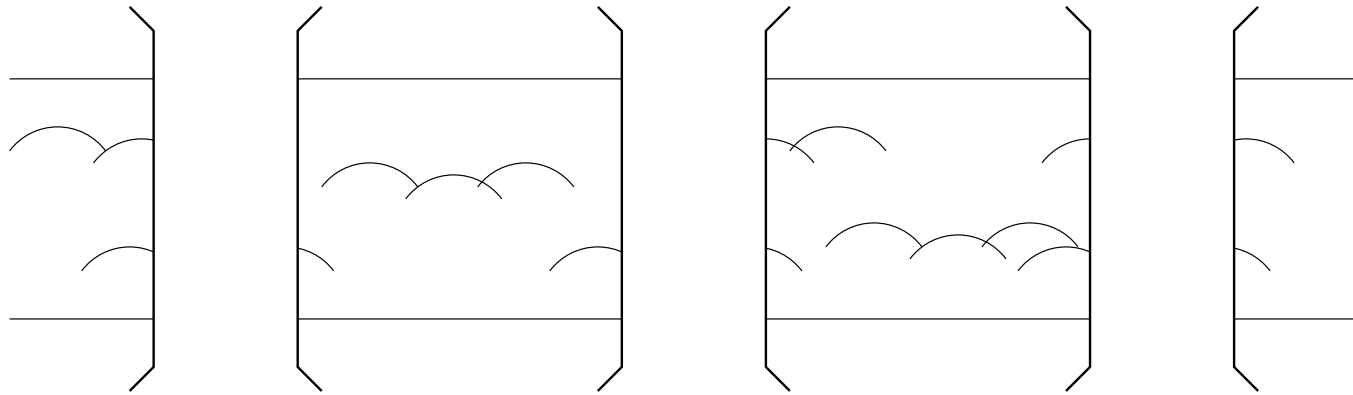


**Anm.** Es ist sehr schwierig, zu bestimmen, ob ein Hamilton'scher Kreis existiert.

Problem ist NP-vollständig

Im Worst-Case muss man alle Möglichkeiten durchprobieren

## Petersburger Brückenproblem



**Def.** Ein *Kantenzug* ist eine Kantenfolge, bei der jede Kante einmal vorkommt.

**Def.** Eine *Eulertour* ist ein geschl. Kantenzug, in der jede Kante genau einmal vorkommt.

**Satz** Ein zusammenhängender Graph hat eine Eulertour gdw. Knoten geraden Grad haben.

**Anm.** Damit ist der Nachweis der Existenz einer Eulertour einfach.

liegt in  $P$