Endlicher Automat (EA)

Motivation: Automaten für die Modellierung, Spezifikation und Verifikation verwenden!

Definition Ein *Endlicher Automat* $A = (S, I, \Sigma, T, F)$ besteht aus

- Menge von Zuständen S (normalerweise endlich)
- Menge von Initialzuständen $I \subseteq S$
- Eingabe-Alphabet Σ (normalerweise endlich)
- Übergangsrelation $T \subseteq S \times \Sigma \times S$
  schreibe $s \xrightarrow{a} s'$ gdw. $(s, a, s') \in T$ gdw. $T(s, a, s')$ "gilt"
- Menge von Finalzuständen $F \subseteq S$

Sprache eines EA

Definition Ein EA A akzeptiert ein Wort $w \in \Sigma^*$ gdw. es s_i und a_i gibt mit

$$s_0 \stackrel{a_1}{\rightarrow} s_1 \stackrel{a_2}{\rightarrow} s_2 \stackrel{a_3}{\rightarrow} \ldots \stackrel{a_{n-1}}{\rightarrow} s_{n-1} \stackrel{a_n}{\rightarrow} s_n,$$

wobei $n \geq 0$, $s_0 \in I$, $s_n \in F$ und $w = a_1 \cdots a_n \quad (n = 0 \Rightarrow w = \varepsilon)$.

Definition Die Sprache $L(A)$ von A ist die Menge der Wörter die er akzeptiert.

- benutze Reguläre Sprachen zur Spezifikation von Syntax

  z.B. Scanner eines Parsers

- benutze EA oder reguläre Sprachen zur Beschreibung von Ereignisströmen!

Produkt-Automat

Definition Der Produkt Automat $A = A_1 \times A_2$ von zwei EA A_1 und A_2 mit gemeinsamen Eingabealphabet $\Sigma_1 = \Sigma_2$ hat folgende Komponenten:

$$S = S_1 \times S_2 \qquad I = I_1 \times I_2$$

$$\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2 \qquad F = F_1 \times F_2$$

$$T((s_1, s_2), a, (s_1', s_2')) \quad \text{gdw.} \quad T_1(s_1, a, s_1') \text{ und } T_2(s_2, a, s_2')$$

Satz Seien A, A_1, und A_2 wie oben, dann $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$

Beispiel: Konstruktion eines Automaten, der Wörter mit Prefix ab und Suffix ba akzeptiert.

(als regulärer Ausdruck: $a \cdot b \cdot \mathbf{1}^* \cap \mathbf{1}^* \cdot b \cdot a$, wobei $\mathbf{1}$ für alle Buchstaben steht)

Vollständigkeit und Determinismus

Definition Zu $s \in S$, $a \in \Sigma$ bezeichne $s \xrightarrow{a}$ die Menge der Nachfolger von s definiert als

$$s \xrightarrow{a} = \{s' \in S \mid T(s,a,s')\}$$

Definition Ein EA ist *vollständig* gdw. $|I| > 0$ und $|s \xrightarrow{a}| > 0$ für alle $s \in S$ und $a \in \Sigma$.

Definition ... *deterministisch* gdw. $|I| \leq 1$ und $|s \xrightarrow{a}| \leq 1$ für alle $s \in S$ und $a \in \Sigma$.

Fakt ... deterministisch und vollständig gdw. $|I| = 1$ und $|s \xrightarrow{a}| = 1$ für alle $s \in S$, $a \in \Sigma$.

Teilmengenkonstruktion

Definition Der Power-Automat $A = \mathbb{P}(A_1)$ eines EA A_1 hat folgende Komponenten

$$S = \mathbb{P}(S_1) \quad (\mathbb{P} = \text{Potenzmenge}) \qquad I = \{I_1\}$$

$$\Sigma = \Sigma_1 \qquad F = \{F' \subseteq S_1 \mid F' \cap F_1 \neq \emptyset\}$$

$$T(S', a, S'') \quad \text{gdw.} \quad S'' = \bigcup_{s \in S'} s \xrightarrow{a}$$

Satz A, A_1 wie oben, dann $L(A) = L(A_1)$ und A ist deterministisch und vollständig.

Beispiel: Spam-Filter basierend auf der White-List “abb”, “abba”, und “abacus”!

(Regulärer Ausdruck: “abb” | “abba” | “abacus”)

Komplement eines Automaten

Definition Der Komplementär-Automat $A = K(A_1)$ eines endlichen Automaten A_1 hat dieselben Komponenten wie A_1, bis auf $F = S \backslash F_1$.

Satz Der Komplementär-Automat $A = K(A_1)$ eines deterministischen und vollständigen Automaten A_1 akzeptiert die komplementäre Sprache $L(A) = \overline{L(A_1)} = \Sigma^* \backslash L(A_1)$.

Beispiel: Spam-Filter basierend auf der Black-List “abb”, “abba”, und “abacus”!

(Regulärer Ausdruck: $\overline{\text{“abb”} \mid \text{“abba”} \mid \text{“abacus”}}$)

Orakel-Konstruktion

Idee: ersetze Nicht-Determinismus durch Orakel

Definition Der Orakelisierte EA $A = Orakel(A_1)$ eines EA A_1 hat die Komponenten:

- $S = S_1$
- $I = I_1$
- $\Sigma = \Sigma_1 \times S_1$
- $T(s,(a,t),s')$ gdw. $s' = t$ und $T_1(s,a,t)$
- $F = F_1$

Zur Orakel-Konstruktion

Fakt $\pi_1(L(Oracle(A))) = L(A_1)$ (π_1 Projektion auf erste Komponente)

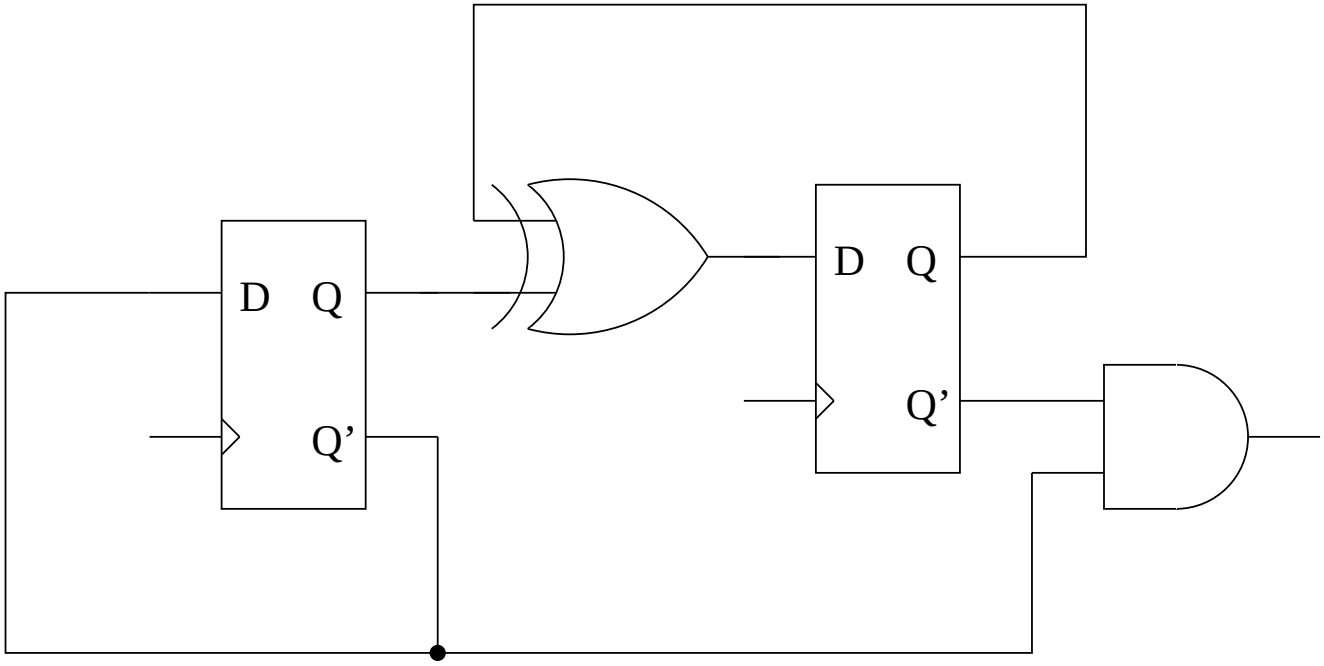
Fakt $Orakel(A_1)$ ist deterministisch gdw. $|I_1| \leq 1$.

Fakt $Orakel(A_1)$ ist fast immer unvollständig (z.B. $T_1 \neq S_1 \times \Sigma_1 \times S_1$ und $|S_1| > 1$).

Hinweis Vollständigkeit lässt sich erreichen, wenn schon A_1 vollständig ist und man statt S_1 die Menge $\{0,\ldots,n-1\}$ zu Σ_1 hinzufügt, wobei n die maximale Anzahl der Nachfolger darstellt: $n = \max_{s\in S, a\in\Sigma}|s \xrightarrow{a}|$.

$$T(s,(a,i),s') \quad \text{gdw.} \quad s' = s_j, \quad s \xrightarrow{a} = \{s_0,\ldots,s_{m-1}\}, \quad j \equiv i \bmod m$$

Übung Man führe beide Orakel-Konstruktionen für $a \cdot b \cdot \mathbf{1}^* \cap \mathbf{1}^* \cdot b \cdot a$ durch.


D
Q
Q'
D
Q
Q'

Ein/Ausgabe-Automat

Implementierungen von Automaten müssen deterministisch sein.

Definition Ein/Ausgabe Automat $A = (S, i, \Sigma, T, \Theta, O)$ besteht aus Folgendem:

- einer (endlichen) Menge von Zuständen S,
- genau **einem** Initialzustand i,
- einem Eingabealphabet Σ,
- einer Übergangs**funktion** $T \subseteq S \times \Sigma \rightarrow S$
- einem Ausgabealphabet Θ, mit
- Ausgabefunktion $O: S \times \Sigma \rightarrow \Theta$ (Moore-Maschine: $O: S \rightarrow \Theta$)

Verhalten eines Ein/Ausgabe-Automaten

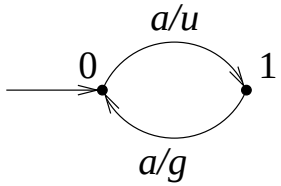
Sei $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$.

Definition Man interpretiere T als *erweiterte* Übergangsfunktion $T \subseteq S \times \Sigma^* \to S$ wie folgt: es gelte $s = T(s, \varepsilon)$ und $s' = T(s, a \cdot w) \Leftrightarrow \exists s''[s'' = T(s,a) \wedge s' = T(s'', w)]$.

Definition Ebenso interpretiere man O als *erweiterte* Ausgabefunktion $O: S \times \Sigma^* \to \Theta^*$: es gelte $O(s, \varepsilon) = \varepsilon$ und $O(s, a \cdot w) = b \cdot w'$, mit $s' = T(s,a)$ und $w' = O(s', w)$.

Definition Das Verhalten $V: \Sigma^* \to \Theta^*$ eines Ein/Ausgabe-Automaten ist definiert durch $V(w) = O(i, w)$.

Beispiel $S = \{0,1\}$, $\Sigma = \{a\}$, $\Theta = \{g,u\}$,



$$T(0, a^{2n}) = 0, \quad T(0, a^{2n+1}) = 1, \quad T(1, a^{2n}) = 1, \quad T(1, a^{2n+1}) = 0$$

$$V(a^{2n}) = (ug)^n, \quad V(a^{2n+1}) = (ug)^n u$$

Ein/Ausgabe-Automat als EA

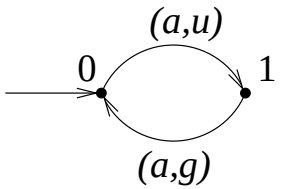
Gegeben ein Ein/Ausgabe-Automat $A = (S, i, \Sigma, T, \Theta, O)$.

Definition Der EA zu A sei definiert als $A' = (S, \{i\}, \Sigma \times \Theta, T', S)$ mit

$$T'(s,(a,b),s') \text{ gdw. } s' = T(s,a) \text{ und } b = O(s,a).$$

Fakt $V(w) = w'$ gdw. $(w, w') \in L(A')$

Fortsetzung des Beispiels:



(graphisch fast kein Unterschied)

EA als Ein/Ausgabe-Automat

Gegeben ein EA $A = (S, I, \Sigma, T, F)$.

Definition Der Ein/Ausgabe-Automat zu A sei definiert als $A' = (\mathbb{P}(S), I, \Sigma, T', \{0,1\}, O)$ mit T' die Übergangsrelation von $\mathbb{P}(A)$ und $O(S', a) = 1$ gdw. $S' \cap F \neq \emptyset$.

Fakt $w \in L(A)$ gdw. $V(w \cdot x) \in \mathbf{1}^{|w|} \cdot 1$ für ein $x \in \Sigma$

Fazit des Vergleiches von Ein/Ausgabe-Automat mit EA:

Im wesentlichen stellen beide die gleiche mathematische Struktur dar.

Wir konzentrieren uns auf die kompaktere und elegantere Version des EA.

Insbesondere Nicht-Determinismus lässt sich mit EA besser darstellen.