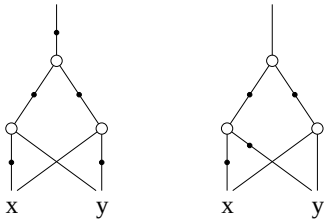
Nicht-Kanonizität von AIGs



$$\bar{x} \cdot y \vee x \cdot \bar{y} \quad \equiv \quad (\bar{x} \vee \bar{y}) \cdot (x \vee y)$$

beide Formeln und AIGs beschreiben XOR von x und y

(Ausmultiplizieren der rechten Formel ergibt linke Formel)

i.Allg. gibt es mehrere AIGs für dieselbe boolesche Funktion

Binary Decision Diagrams

- neue dreistellige Basis-Operation ITE (if-then-else):

  Bedingung ist immer eine Variable

- gehen zurück auf Shannon (deshalb auch Shannon-Graphs)

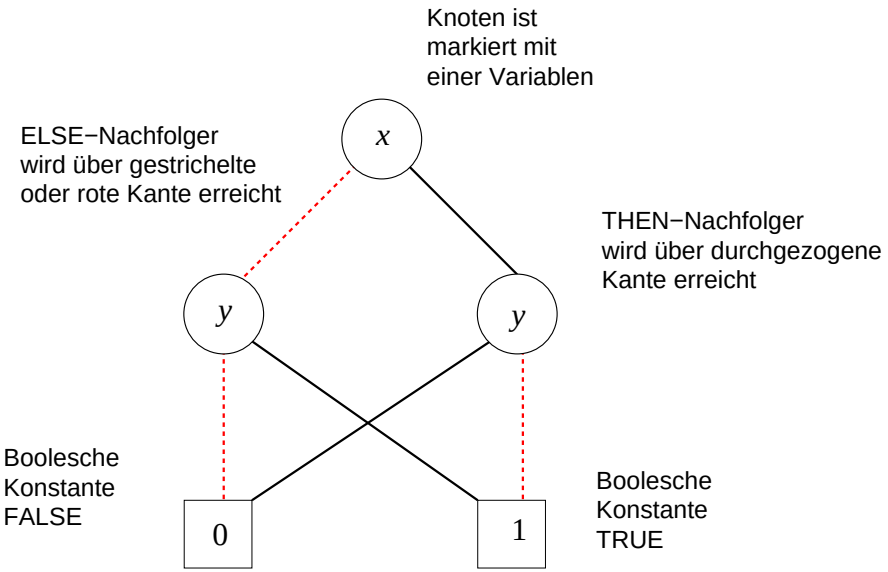
- meist verwendete Version sind die ROBDDs

  Reduced Ordered Binary Decision Diagrams

- [Bryant86] hat Kanonizität von ROBDDs gezeigt:

  Jede Boolesche Funktion hat genau einen ROBDD

Graphische Darstellung



Semantik

- innere Knoten sind ITE, Blätter sind boolesche Konstante

- Schreibweise $ite(x, f_1, f_0)$ bedeutet *wenn* x *dann* f_1 *ansonsten* f_0

  (beachte: ELSE-Argument f_0 kommt hinter f_1 trotz umgekehrter Indizierung)

- Semantik $eval$ produziert booleschen Ausdruck aus einem BDD

$$\begin{aligned} eval(0) &\equiv 0 \\ eval(1) &\equiv 1 \\ eval((ite(x, f_1, f_0)) &\equiv x \cdot eval(f_1) \vee \bar{x} \cdot eval(f_0) \end{aligned}$$

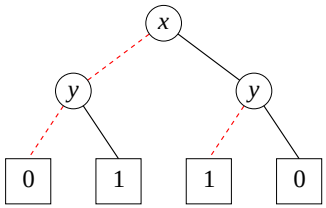
- BDDs sind auch wieder algebraisch reduzierte DAG's

  (max. Sharen von isomorphen Teil-Graphen wie bei AIGs)

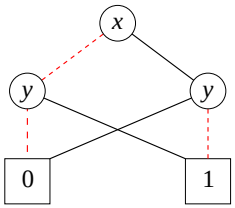
- Negations-Kanten wie bei AIGs möglich

Von der Funktionstabelle zum BDD

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

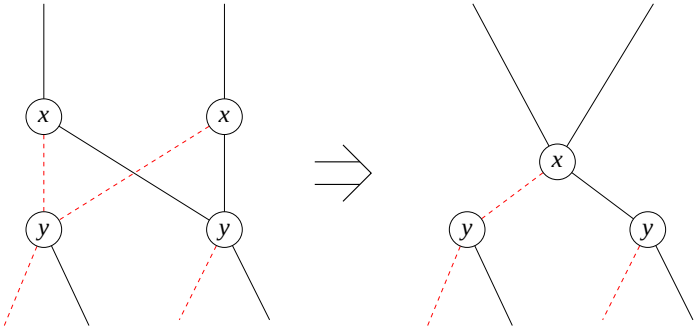


Entscheidungs-Baum



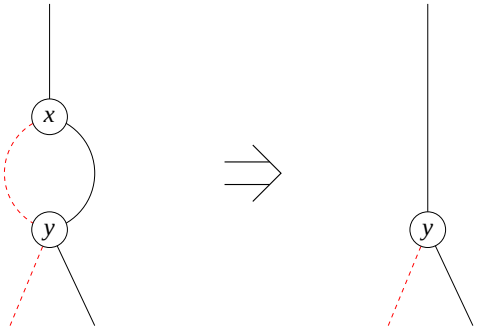
Entscheidungs-Diagramm
(DAG)

Algebraische Reduktions-Regel



Maximales Sharen isomorpher Teil-Graphen

Semantische Reduktions-Regel

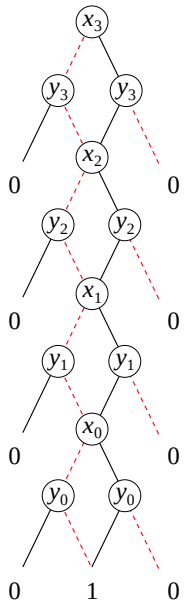


Elimination redundanter Innerer Knoten

Reduced Ordered BDDs

- maximale algebraische und semantische Reduktion
  (das Reduced in ROBDDs)
- Variablen von der Wurzel zu den Blättern sind gleich geordnet
  (das Ordered in ROBDDs)
- diesen Annahmen machen BDDs kanonisch modulo Variablenordnung
- unterschiedliche Ordnungen führen i.Allg. zu unterschiedlichen BDDs
- Variablenordnung bestimmt essentiell die Grösse von BDDs
- **im weiteren meinen wir immer ROBDDs, wenn wir BDD sagen**

Linearer BDD für Vektoren-Vergleich



Boolesche Funktion:

$$\Pi_{i=0}^{n-1} x_i = y_i$$

Verschränkte Variablen-Ordnung (interleaved)

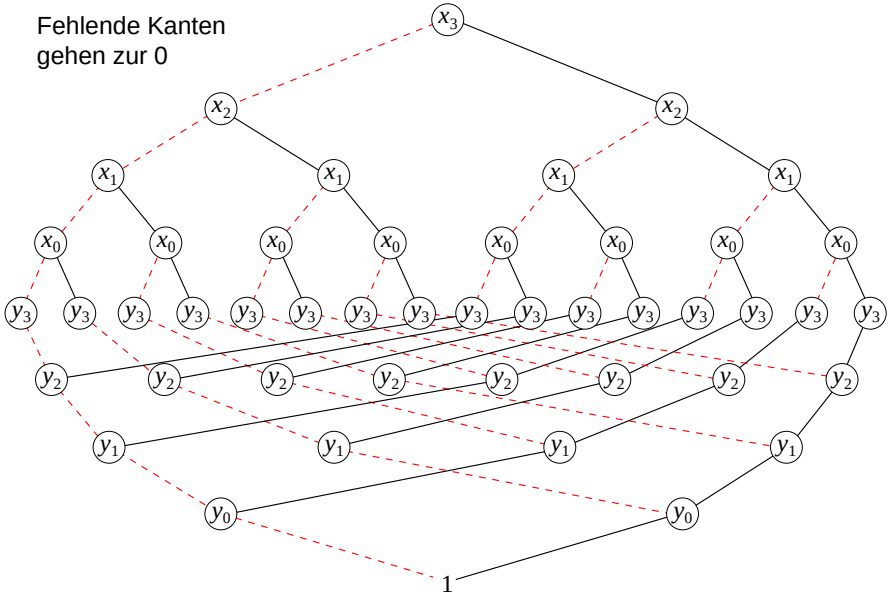
$$x_3 > y_3 > x_2 > y_2 > x_1 > y_1 > x_0 > y_0$$

Allgemein:

Vergleich zweier n-Bit Vektoren braucht bei verschränkter Ordnung $3 \cdot n$ innere Knoten.

Exponentieller BDD für Vektoren-Vergleich

Fehlende Kanten gehen zur 0



Variablen-Ordnung

- es gibt exponentielle Unterschiede zwischen Variablen-Ordnungen
- es gibt aber leider auch *exponentielle* Funktionen:
  BDD ist immer exponentiell, z.B. mittlere Ausgabe-Bits von Multiplizierer
- es gibt Heuristiken zur statischen Variablen-Ordnung:
  meist einfache Auflistung der Variablen in DFS des DAG/AIG
  (etwa wie in `input_cone_aig`)
- zusätzlich gibt es noch *dynamische Umordnung von Variablen*
  basiert auf *in-place* Austausch von benachbarten Variablen

Tautologie, Erfüllbarkeit, Äquivalenz

Kanonizität der BDDs für boolesche Funktionen ergibt:

- ein BDD ist eine Tautologie, gdw. er nur aus dem 1-Blatt besteht
- ein BDD ist erfüllbar, gdw. er nicht aus dem 0-Blatt besteht
- zwei BDDs sind äquivalent, gdw. die BDDs sind isomorph
  (werden BDDs wie AIGs in der gleichen Unique-Tabelle gespeichert, dann ist der Test auf Äquivalenz ein einfacher Pointer-Vergleich)

Frage: Wo ist die NP-Vollständig der Erfüllbarkeit geblieben?

Antwort: Versteckt sich im Auftwand der Erzeugung eines BDDs.

Shannonsche Expansionsregel

lautet wie folgt:

$$f(x) \quad \equiv \quad x \cdot f(1) \vee \bar{x} \cdot f(0)$$

Sei nun x die oberste Variable zweier BDDs f und g:

$$f \quad \equiv \quad ite(x, f_1, f_0) \qquad\qquad g \quad \equiv \quad ite(x, g_1, g_0)$$

mit f_i bzw. g_i die Kinder von f und g für $i = 0, 1$. Dann folgt

$$f(0) = f_0 \qquad g(0) = g_0 \qquad f(1) = f_1 \qquad g(1) = g_1$$

da nach dem **R** in **R**OBDD x nur ganz oben in f und g vorkommt.

$$\begin{aligned}(f@g)(x) \quad &\equiv \quad x \cdot (f@g)(1) \vee \bar{x} \cdot (f@g)(0) \\ &\equiv \quad x \cdot (f(1)@g(1)) \vee \bar{x} \cdot (f(0)@g(0)) \\ &\equiv \quad x \cdot (f_1@g_1) \vee \bar{x} \cdot (f_0@g_0)\end{aligned}$$

wobei @ eine beliebige zweistellige boolesche Operation ist (z.B. $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, ...)

Rekursives Schema zur Berechnung von Operationen auf BDDs

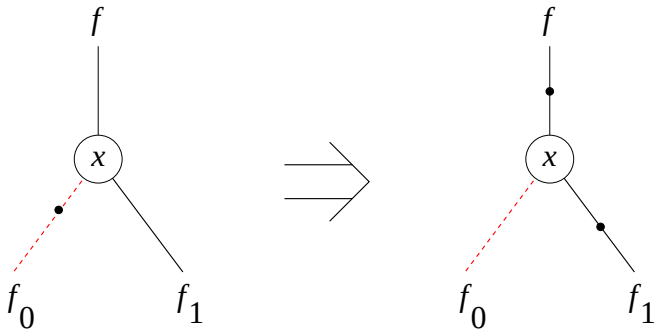
Repräsentation von BDDs in C

```
typedef struct BDD BDD;

struct BDD
{
  int idx, mark;
  BDD *child[2], *next;
};

#define sign_bdd(ptr) (1 & (unsigned) ptr)
#define strip_bdd(ptr) ((BDD*) (~1 & (unsigned) ptr))
#define not_bdd(ptr) ((BDD*) (1 ^ (unsigned) ptr))
#define true_bdd ((BDD*) 1)
#define false_bdd ((BDD*) 0)

#define is_constant_bdd(ptr) \
  ((ptr) == true_bdd || (ptr) == false_bdd)
```


Unique-Tabelle für BDDs

```
#define UNIQUE_SIZE (1 << 20)
BDD *unique[UNIQUE_SIZE];

BDD **
find_bdd (int idx, BDD * c0, BDD * c1)
{
  BDD *r, **p;
  unsigned h = (idx + ((int) c0) * 65537 + 13 * (int) c1);
  h = h & (UNIQUE_SIZE - 1);
  for (p = unique + h; (r = *p); p = &r->next)
    if (r->idx == idx && r->child[0] == c0 && r->child[1] == c1)
      break;

  return p;
}
```


Normalisierung von BDD Knoten



$$\begin{aligned}ite(x, f_1, \overline{f_0}) \quad &\equiv \quad x \cdot f_1 \vee \bar{x} \cdot \overline{f_0} \quad \equiv \quad \overline{(\bar{x} \vee \overline{f_1}) \cdot (x \vee f_0)} \\ &\equiv \quad \overline{x \cdot \overline{f_1} \vee \bar{x} \cdot f_0 \vee \overline{f_1} \cdot f_0} \\ &\equiv \quad \overline{x \cdot \overline{f_1} \vee \bar{x} \cdot f_0} \quad \equiv \quad \overline{ite(x, \overline{f_1}, f_0)}\end{aligned}$$

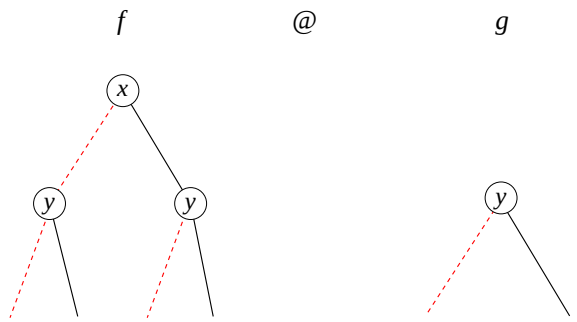
Hilfs-Konstruktor für BDDs

```
BDD *
new_bdd_aux (int idx, BDD * c0, BDD * c1)
{
  BDD *res;

  assert (!sign_bdd (c0));

  if ((res = *find_bdd (idx, c0, c1)))
    return res;

  res = (BDD *) malloc (sizeof (BDD));
  memset (res, 0, sizeof (BDD));
  res->idx = idx;
  res->child[0] = c0;
  res->child[1] = c1;
  *find_bdd (idx, c0, c1) = res;

  return res;
}
```


Konstruktor für BDDs

```
BDD *
new_bdd (int idx, BDD * c0, BDD * c1)
{
  BDD *res;
  int sign;

  if (c0 == c1)
    return c0;

  if ((sign = sign_bdd (c0)))
    {
      c0 = not_bdd (c0);
      c1 = not_bdd (c1);
    }

  res = new_bdd_aux (idx, c0, c1);

  return sign ? not_bdd (res) : res;
}
```


Unterschiedliche Top-Indizes



$$(f \wedge g)(x) \quad \equiv \quad x \cdot (f_1 \wedge g) \vee \bar{x} \cdot (f_0 \wedge g)$$

bei nicht passenden Indizes wird nur ein Knoten zerlegt

Top-Index Berechnung

```
int
top_idx_bdd (BDD * a, BDD * b)
{
  int res[2];
  res[0] = (is_constant_bdd (a)) ? -1 : strip_bdd (a)->idx;
  res[1] = (is_constant_bdd (b)) ? -1 : strip_bdd (b)->idx;
  return res[res[0] < res[1]];
}
```

gibt einfach den Index der Variablen im obersten Knoten zurück

(hier kann einer der beiden Argumente eine Konstante sein)

Berechnung einfacher Kofaktoren

```
BDD *
cofactor (BDD * bdd, int pos, int idx)
{
  BDD *res;
  int sign;
  if (is_constant_bdd (bdd))
    return bdd;
  if ((sign = sign_bdd (bdd)))
    bdd = not_bdd (bdd);
  res = (bdd->idx == idx) ? bdd->child[pos] : bdd;
  return sign ? not_bdd (res) : res;
}
```

`pos`-ter Kofaktor von `bdd` ist `pos`-tes Kind wenn Variablen-Index passt

ansonsten wird der gleiche BDD zurückgegeben

(man beachte Propagierung des Vorzeichens)

Divide

```
void
cofactor2 (BDD * a, BDD * b, BDD * c[2][2], int *idx_ptr)
{
  int idx = *idx_ptr = top_idx_bdd (a, b);
  c[0][0] = cofactor (a, 0, idx);
  c[0][1] = cofactor (a, 1, idx);
  c[1][0] = cofactor (b, 0, idx);
  c[1][1] = cofactor (b, 1, idx);
}
```

bestimme Top-Index der beiden BDDs `a` und `b` und

berechne Kofaktoren bezüglich des Top-Index

Basis-Funktoren für Apply

```
BDD *
basic_and (BDD * a, BDD * b)
{
  assert (is_constant_bdd (a) && is_constant_bdd (b));
  return (BDD *) (((unsigned) a) & (unsigned) b);
}

BDD *
basic_or (BDD * a, BDD * b)
{
  assert (is_constant_bdd (a) && is_constant_bdd (b));
  return (BDD *) (((unsigned) a) | (unsigned) b);
}

BDD *
basic_xor (BDD * a, BDD * b)
{
  assert (is_constant_bdd (a) && is_constant_bdd (b));
  return (BDD *) (((unsigned) a) ^ (unsigned) b);
}
```


Bryant's Apply Algorithmus

```
typedef BDD *(*BasicFunctor) (BDD *, BDD *);

BDD *
apply (BasicFunctor op, BDD * a, BDD * b)
{
  BDD *tmp[2], *c[2][2];
  int idx;
  if (is_constant_bdd (a) && is_constant_bdd (b))
    return op (a, b);
  cofactor2 (a, b, c, &idx);
  tmp[0] = apply (op, c[0][0], c[1][0]);
  tmp[1] = apply (op, c[0][1], c[1][1]);
  return new_bdd (idx, tmp[0], tmp[1]);
}
```

Definition eines Funktions-Pointer-Typ, zur Aufnahme von Operationen

Abkürzungen

```
BDD *
and_bdd (BDD * a, BDD * b)
{
  return apply (basic_and, a, b);
}

BDD *
or_bdd (BDD * a, BDD * b)
{
  return apply (basic_or, a, b);
}

BDD *
xor_bdd (BDD * a, BDD * b)
{
  return apply (basic_xor, a, b);
}

BDD *
var_bdd (int idx)
{
  return new_bdd (idx, false_bdd, true_bdd);
}
```


Zusammenfassung Apply

- es fehlt noch ein **Cache**: dann linear in beiden Argumenten
  im Cache merkt man sich schon mal durchgeführte Berechnungen
  dann können alle Knoten von beiden Argumenten nur einmal auftreten

- **Optimierung**: Spezialalgorithmen für AND und XOR einführen
  auch wenn nur ein Argument konstant ist, kann man früher abbrechen
  ebenso, wenn beide Argumente bis auf das Vorzeichen identisch sind

- weitere BDD-Algorithmen basieren auf gleichem Schema:
  Kofaktoren bestimmen, Rekursion, mit Shannon zusammensetzen

Zusammenfassung BDDs

- Kanonische Datenstruktur für boolesche Funktionen

- kein Allheilmittel aber wesentlich besser als DNF

- häufig kompakt für in der Praxis auftretenden Funktionen

- Trade-Off: *Platz statt Zeit*

- Anwendungen:
  Synthese, Symbolische Simulation, Equivalence Checking, Model-Checking