Endlicher Automat (EA)

siehe auch Formale Grundlagen 3

Motivation: Automaten für die Modellierung, Spezifikation und Verifikation verwenden!

Definition Ein *Endlicher Automat* $A = (S, I, \Sigma, T, F)$ besteht aus

- Menge von Zuständen S (normalerweise endlich)
- Menge von Initialzuständen $I \subseteq S$
- Eingabe-Alphabet Σ (normalerweise endlich)
- Übergangsrelation $T \subseteq S \times \Sigma \times S$
  schreibe $s \xrightarrow{a} s'$ gdw. $(s, a, s') \in T$ gdw. $T(s, a, s')$ "gilt"
- Menge von Finalzuständen $F \subseteq S$

Sprache eines EA

Definition Ein EA A akzeptiert ein Wort $w \in \Sigma^*$ gdw. es s_i und a_i gibt mit

$$s_0 \stackrel{a_1}{\rightarrow} s_1 \stackrel{a_2}{\rightarrow} s_2 \stackrel{a_3}{\rightarrow} \ldots \stackrel{a_{n-1}}{\rightarrow} s_{n-1} \stackrel{a_n}{\rightarrow} s_n,$$

wobei $n \geq 0$, $s_0 \in I$, $s_n \in F$ und $w = a_1 \cdots a_n \quad (n = 0 \Rightarrow w = \varepsilon)$.

Definition Die Sprache $L(A)$ von A ist die Menge der Wörter die er akzeptiert.

- Benutze Automaten oder reguläre Sprachen zur Beschreibung von Ereignisströmen!
- “Konformität” der Ereignisströme der Implementierung zu denen der Spezifikation!
- Konformität kann präzisiert werden als Teilmengenbeziehung der Sprachen

Produkt-Automat

Definition Der Produkt Automat $A = A_1 \times A_2$ von zwei EA A_1 und A_2 mit gemeinsamen Eingabealphabet $\Sigma_1 = \Sigma_2$ hat folgende Komponenten:

$$S = S_1 \times S_2 \qquad I = I_1 \times I_2$$

$$\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2 \qquad F = F_1 \times F_2$$

$$T((s_1, s_2), a, (s_1', s_2')) \quad \text{gdw.} \quad T_1(s_1, a, s_1') \text{ und } T_2(s_2, a, s_2')$$

Satz Seien A, A_1, und A_2 wie oben, dann $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$

Beispiel: Konstruktion eines Automaten Wörter mit Prefix ab und Suffix ba akzeptiert.

(als regulärer Ausdruck: $a \cdot b \cdot \mathbf{1}^* \cap \mathbf{1}^* \cdot b \cdot a$, wobei $\mathbf{1}$ für alle Buchstaben steht)

Vollständigkeit und Determinismus

Definition Zu $s \in S$, $a \in \Sigma$ bezeichne $s \xrightarrow{a}$ die Menge der Nachfolger von s definiert als

$$s \xrightarrow{a} = \{s' \in S \mid T(s,a,s')\}$$

Definition Ein EA ist *vollständig* gdw. $|I| > 0$ und $|s \xrightarrow{a}| > 0$ für alle $s \in S$ und $a \in \Sigma$.

Definition ... *deterministisch* gdw. $|I| \leq 1$ und $|s \xrightarrow{a}| \leq 1$ für alle $s \in S$ und $a \in \Sigma$.

Fakt ... deterministisch und vollständig gdw. $|I| = 1$ und $|s \xrightarrow{a}| = 1$ für alle $s \in S$, $a \in \Sigma$.

Teilmengenkonstruktion

Definition Der Power-Automat $A = P(A_1)$ eines EA A_1 hat folgende Komponenten

$$S = P(S_1) \quad (P = \text{Potenzmenge}) \qquad I = \{I_1\}$$

$$\Sigma = \Sigma_1 \qquad F = \{F' \subseteq S \mid F' \cap F_1 \neq \emptyset\}$$

$$T(S', a, S'') \quad \text{gdw.} \quad S'' = \{s'' \mid \exists s' \in S' \text{ mit } T(s', a, s'')\}$$

Satz A, A_1 wie oben, dann $L(A) = L(A_1)$ und A ist deterministisch und vollständig.

Beispiel: Spam-Filter basierend auf der White-List “abb”, “abba”, und “abacus”!

(Regulärer Ausdruck: “abb” | “abba” | “abacus”)

Komplement eines Automaten

Definition Der Komplementär-Automat $A = K(A_1)$ eines endlichen Automaten A_1 hat dieselben Komponenten wie A_1, bis auf $F = S \backslash F_1$.

Satz Der Komplementär-Automat $A = K(A_1)$ eines deterministischen und vollständigen Automaten A_1 akzeptiert die komplementäre Sprache $L(A) = \overline{L(A_1)} = \Sigma^* \backslash L(A_1)$.

Beispiel: Spam-Filter basierend auf der Black-List “abb”, “abba”, und “abacus”!

(Regulärer Ausdruck: $\overline{\text{“abb”} \mid \text{“abba”} \mid \text{“abacus”}}$)

Konformität von Ereignisströmen

- Modellierung und Spezifikation mit Automaten:
  - Ereignisströme einer Implementierung modelliert durch EA A_1
  - Partielle Spezifikation der Ereignisströme als EA A_2
- Konformitäts-Test:
  - $L(A_1) \subseteq L(A_2)$
  - gdw. $L(A_1) \cap \overline{L(A_2)} = \emptyset$
  - gdw. $A_1 \times K(P(A_2))$ keinen erreichbaren Finalzustand hat
- **Beispiel:** Spezifikation $S = (cs \,|\, sc \,|\, ss)^*$, Implementierung $I = \left((s \,|\, c)^2\right)^*$

Weitere Beispiele zur Konformität

- Temporale Eigenschaften: ($\mathbf{1}$ steht für ein beliebiges Zeichen)
  - jeden dritten Schritt gilt a: $(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \cdot a)^*$
  - genau jeden dritten Schritt gilt a: $(\overline{a} \cdot \overline{a} \cdot a)^*$
  - einem a (acknowledge) muss ein r (request) vorangehen: $\overline{(\overline{r})^* \cdot a}$
  - jedem a muss ein r vorangehen: $\overline{(\mathbf{1}^* \cdot a)^* \cdot (\overline{r})^* \cdot a}$
- Verfeinerung: (am Beispiel Scheduling dreier Prozesse a, b und c)
  - abstrakter Round-Robin Scheduler: $(abc \mid acb \mid bac \mid bca \mid cab \mid cba)^*$
  - Round-Robin Scheduler mit Vorrang a vor b: $(abc \mid acb \mid cab)^*$
  - Round-Robin Scheduler mit Vorrang a vor b und c vor b: $(acb \mid cab)^*$
  - deterministischer Round-Robin Scheduler der Implementierung: $(cab)^*$

Konformität bei Aussagenlogischen Spezifikationen

- ähnliche Vorgehensweise:
  - geg. aussagenlogische Formel f über den booleschen Variablen $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
  - Expansion $E(f) \subseteq 2^n$ ist die Menge der erfüllenden Belegungen von f

    $$(a_1, \ldots, a_n) \in E(f) \quad \text{gdw.} \quad f[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n] = 1$$

  - z.B. $E(f) \neq \emptyset$ gdw. f erfüllbar (engl. satisfiable)

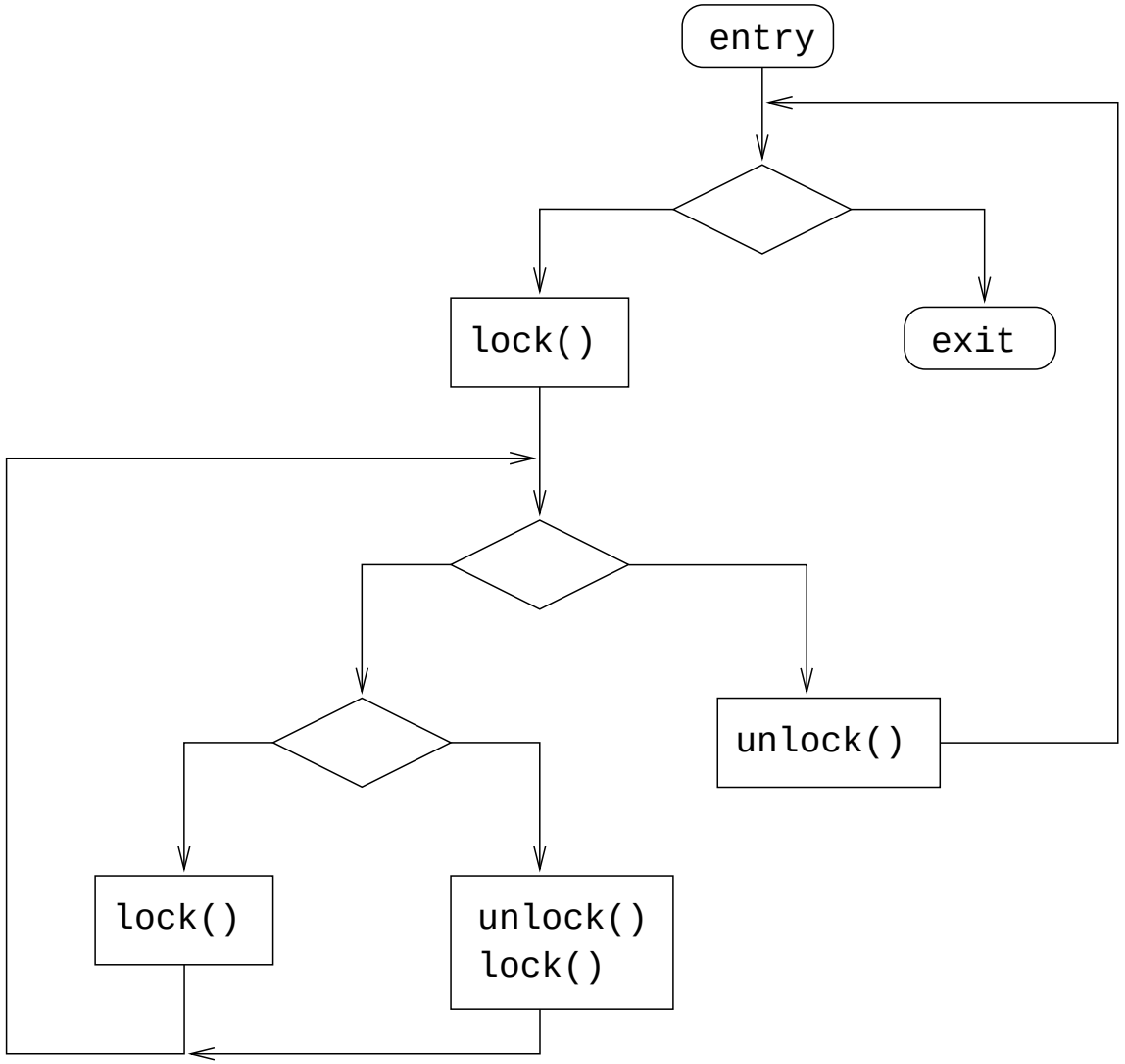
- Modellierung und Spezifikation:
  - f_1 charakterisiert die für die Implementierung möglichen Konfigurationen
  - f_2 beschreibt eine partielle Spezifikation der gültigen Konfigurationen

- Konformitäts-Test: $f_1 \Rightarrow f_2$ gdw. $E(f_1) \subseteq E(f_2)$ gdw. $E(f_1) \cap \overline{E(f_2)} = \emptyset$

  (oder in der Praxis: ... gdw. $f_1 \wedge \neg f_2$ unerfüllbar)

Vom C-Programm zum EA durch Abstraktion


```
while (...) {
  lock ();
  ...
  while (...) {
    if (...) {
      lock ();
      ...
    } else {
      unlock ();
      ...
      lock ();
    }
    ...
  }
  ...
  unlock();
}
```



$$(l \cdot (l \mid u \cdot l)^* \cdot u)^*$$

Probleme bei Abstraktion

```
assert (i < n);
lock ();
do {
  ...
  i++;
  if (i >= n)
    unlock ();
  ...
} while (i < n);
```

$l \cdot (\varepsilon | u)^*$ verletzt partielle Spezifikation $\overline{\mathbf{1}^* \cdot l \cdot \overline{u}^*}$

("`...`" führt weder zu einem `lock` noch `unlock` und lässt `i` und `n` unberührt)

Predicate Abstraction

verfeinerte Abstraktion zu EA durch Einführung einer Prädikats-Variable: $\texttt{b} == (i < n)$

```
assert (i < n);
lock ();
do {
  ...
  i++;
  if (i >= n)
    unlock ();
  ...
} while (i < n);
```

abstrahiert zu

```
assert (b);
lock ();
do {
  ...
  if (b) b = *;
  if (!b)
    unlock ();
  ...
} while (b);
```

$l \cdot \varepsilon^* \cdot u$ erfüllt partielle Spezifikation $\overline{\mathbf{1}^* \cdot l \cdot \overline{u}^*}$

("..." führt weder zu einem `lock` noch `unlock` und lässt `i` und `n` unberührt)