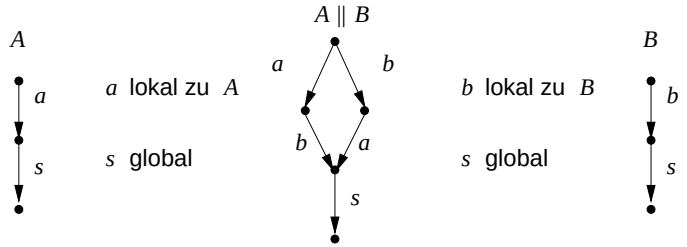
Asynchron versus Synchrone Komposition

- Synchrone Komposition
  - Gleichschritt aller Komponenten zu einem globalen Takt
  - entspricht der Konstruktion des Produkt-Automaten
  - typische Modellierung von Sequentieller **Hardware**
    (obwohl auf Transistor-Ebene eigentlich alles asynchron)

- Asynchrone Komposition
  - Komponenten laufen im Wesentlichen unabhängig nach eigenem Takt
  - typische Modellierung für Kommunikationsprotokolle und Verteilte **Software**
  - Synchronisation: Systemcalls/Interrupts/Signale/Nachrichten/Kanäle/RPC
  - geeignete Vereinfachung: **Interleaving**

Beispiel Interleaving



- jeder Prozess kommt **abwechselnd** dran mit seinen **lokalen** Aktionen
- auf **globale** Aktionen wird per **Rendezvous** synchronisiert
- Standard-Parallel-Komposition in Prozess-Algebra

Asynchrone Komposition von LTS durch Interleaving

Definition Zu zwei LTS A_1 und A_2 besteht die parallele Komposition $A = A_1 \,||\, A_2$ aus folgenden Bestandteilen:

$S = S_1 \times S_2$, $\quad \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\quad I = I_1 \times I_2$, $\quad T$ wird wie folgt definiert:

$$(s,t) \xrightarrow{a} (s',t') \text{ in } A \quad \text{gdw.} \quad \begin{array}{llll} s \xrightarrow{a} s' \text{ in } A_1 & \text{und} & t' = t & \text{falls } a \in \Sigma \backslash \Sigma_2 \\ t \xrightarrow{a} t' \text{ in } A_2 & \text{und} & s' = s & \text{falls } a \in \Sigma \backslash \Sigma_1 \\ s \xrightarrow{a} s' \text{ in } A_1 & \text{und} & t \xrightarrow{a} t' \text{ in } A_2 & \text{falls } a \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \end{array}$$

Interleaving mit Synchronisation auf gemeinsamen Aktionen

Lokale und Globale Symbole/Ereignisse/Aktionen

Definition In $A_1 \,||\, A_2$ ist ein Symbol a **lokal** für A_i gdw. $a \in \Sigma_i$ und $a \notin \Sigma_j$ für alle $i \neq j$. Die Menge der lokalen Symbole für A_i wird mit Λ_i bezeichnet.

Definition Ein Symbol heißt **lokal** falls es lokal für ein A_i ist. Allen lokalen Symbole sind in $\Lambda = \bigcup \Lambda_i$ zusammengefasst.

Definition Übergang $(s_1,s_2) \xrightarrow{a} (s'_1,s'_2)$ in $A_1 \,||\, A_2$ ist lokal (für A_i), falls a lokal (für A_i).

Definition **Globale** Symbole bzw. Übergänge sind solche, die nicht lokal sind. Die Menge der globalen Symbole zu A_i wird mit Γ_i bezeichnet und deren Zusammenfassung als $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$.

Falls $i = 1$ so sei $\sigma(i) = 2$ und umgekehrt.

Fakt $(s_1,s_2) \xrightarrow{a} (s'_1,s'_2)$ in A gdw.

$$\begin{array}{ll} s_i \xrightarrow{a} s'_i \text{ in } A_i \text{ und } s'_{\sigma(i)} = s_{\sigma(i)} & \text{falls } a \text{ lokal für } A_i \\ s_j \xrightarrow{a} s'_j \text{ in } A_j \text{ für alle j = 1,2} & \text{falls } a \text{ global} \end{array}$$

Asynchrone Komposition Mehrerer LTS

Fakt Die asynchrone parallele Komposition $||$ ist assoziativ.

(die Schreibweise $A_1 \,||\, A_2 \,||\, \ldots \,||\, A_n$ ist also wohldefiniert)

Fakt ... und kommutativ modulo Bisimulation: $A_1 \,||\, A_2 \approx A_2 \,||\, A_1$

Fakt Für die Übergangsrelation von $A_1 \,||\, A_2 \,||\, \ldots \,||\, A_n$ gilt:

Sei $\Psi(a) \subseteq \{1,\ldots,n\}$ die Menge der Indizes i mit $a \in \Sigma_i$ und $\overline{\Psi(a)}$ deren Komplement.

$(s_1,\ldots,s_n) \xrightarrow{a} (s'_1,\ldots,s'_n)$ gdw. $s_i \xrightarrow{a} s'_i$ für alle $i \in \Psi(a) \neq \emptyset$ und $s'_j = s_j$ für alle $j \in \overline{\Psi(a)}$.

Volle Asynchrone Komposition

Definition Zu zwei LTS A_1 und A_2 besteht die *voll asynchrone* parallele Komposition $A = A_1 \,|||\, A_2$ aus folgenden Bestandteilen:

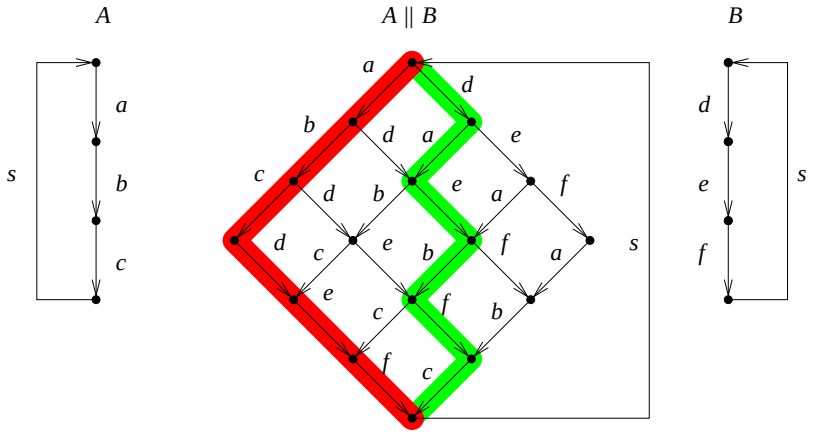
$S = S_1 \times S_2$, $\quad \Sigma = P(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$, $\quad I = I_1 \times I_2$, $\quad T$ wird wie folgt definiert:

$$(s,t) \xrightarrow{M} (s',t') \text{ in } A \quad \text{gdw.} \quad \begin{array}{lll} s \xrightarrow{a} s' \text{ in } A_1 \text{ und } t' = t & & \text{falls } M = \{a\} \subseteq \Sigma_1 \backslash \Sigma_2 \\ t \xrightarrow{b} t' \text{ in } A_2 \text{ und } s' = s & & \text{falls } M = \{b\} \subseteq \Sigma_2 \backslash \Sigma_1 \\ s \xrightarrow{a} s' \text{ in } A_1 \text{ und } t \xrightarrow{a} t' \text{ in } A_2 & & \text{falls } M = \{a\} \subseteq \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \\ s \xrightarrow{a} s' \text{ in } A_1 \text{ und } t \xrightarrow{b} t' \text{ in } A_2 & & \text{falls } a \in \Sigma_1 \backslash \Sigma_2 \\ & & \text{und } b \in \Sigma_2 \backslash \Sigma_1 \\ & & \text{und } M = \{a,b\} \end{array}$$

Vergleich Interleaving mit Voller Asynchroner Komposition

- Erweiterung der Vollen Asynchronen Komposition auf n LTS:
  - $\Sigma = P(\Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_n)$, $\quad T = \ldots$
    (Möglichkeit der gleichzeitigen Synchronisation auf mehrere globale Symbole)
  - insgesamt also exponentielles Aufblasen des Alphabetes!
- Interleaving ist eine Vereinfachung
  - **Fakt** gleiche Menge erreichbarer Zustände
  - Länge von Pfaden zwischen zwei Zuständen kann sich unterscheiden, aber ...
  - ... Modellierung nicht exakt bez. relativer Geschwindigkeit von Komponenten

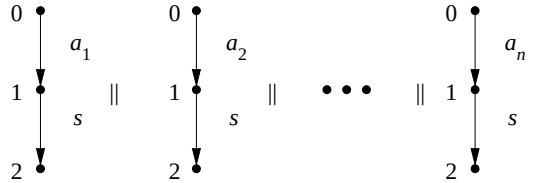
Zustandsexplosion durch Interleaving



Idee Verfolge nur einen der 8 möglichen Pfade, z.B. den roten oder den grünen

Exponentielle Reduktion

$$\Sigma_i = \{a_i, s\}, \quad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n, s\}, \quad \Lambda_i = \{a_i\}, \quad \Gamma = \Gamma_i = \{s\}$$

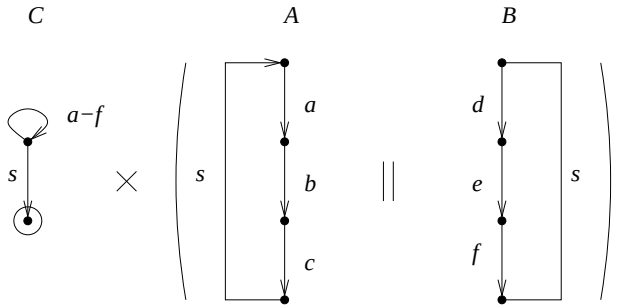


Anzahl Zustände: $|S| = |\{0,1,2\}^n| = 3^n$.

Anzahl erreichbarer Zustände: $|\{0,1\}^n \cup \{2\}^n| = 2^n + 1$

Anzahl notwendiger Zustände: $|(1^*0^* \cap \{0,1\}^n) \cup \{2\}^n| = (n+1)+1$

Synchrone Composition mit Checker-Automaten



$$C \times (A \,||\, B)$$

Einschränkungen

- Checker muss "invariant" gegenüber weggelassenen Übergängen sein
  - Auslassen von Übergängen darf Erreichen von Finalzuständen nicht verhindern
  - Reduktion ist abhängig vom Checker!
- Maximal viele Übergänge wegzulassen geht nicht:
  - nur möglich wenn man schon die Erreichbarkeit von Finalzuständen kennt
  - damit wäre kein Gewinn möglich!
- Ziel ist möglichst einfaches Kriterium zum Weglassen von Übergängen
  - welches im besten Fall statisch überprüft werden kann
  - oder effizient dynamisch während der Suche

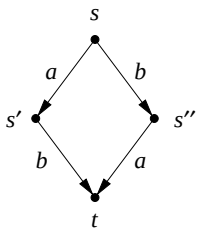
Lokaler Zustand

Definition Ein Zustand $s = (s_1, \ldots, s_n)$ in $A_1 \,||\, \cdots \,||\, A_n$ heißt **lokal** zu A_i gdw.

alle Übergänge in A_i ausgehend von s_i lokal für A_i sind und ein solcher existiert.

Definition Ein Symbol a kommutiert mit dem Symbol b im Zustand s gdw.

es für alle s', s'' mit $s \xrightarrow{a} s'$ und $s \xrightarrow{b} s''$ einen Zustand t gibt, mit $s' \xrightarrow{b} t$ und $s'' \xrightarrow{a} t$.



Fakt Sei s lokal zu A_i, dann kommutieren alle Λ_i mit allen andere $\Sigma \backslash \Lambda_i$.

Lokale Partielle Ordnungs-Reduktion

Partial Order Reduction = Partielle Ordnungs-Reduktion

Definition Eine *Expansion* eines Zustandes ist eine Teil-Menge seiner Nachfolger.

BFS/DFS iteriert nur noch über die Expansion von `current` in der inneren Schleife

```
partial_order_recursive_dfs_aux (Stack stack, State current)
{
  ...

  forall next in expansion (current)
    partial_order_recursive_dfs_aux (stack, next);

  ...
}
```

Definition Eine *partielle* Expansion ist eine **echte** Teil-Menge der Nachfolger.

Expansion in der Lokalen Partiellen Ordnungs-Reduktion

Definition Die *Lokale Partielle Ordnungs-Reduktion* wählt als möglicherweise partielle Expansion eines Zustandes s eine Teil-Menge seiner Nachfolger wie folgt aus:

- genau die lokalen Übergänge von A_i, falls s lokal zu A_i ist

  (in diesem Fall hat man eine partielle Expansion)

- bei mehreren solchen A_i wird ein beliebiges i gewählt

- falls kein solches A_i existiert, besteht die Expansion aus allen Nachfolgern

Lokal Äquivalente Traces

auch “stutter equivalent”

Definition zwei Traces w und w' sind **lokal äquivalent**, geschrieben $w \approx_l w'$, gdw. wenn sie nach Herausstreichen aller lokalen Symbole identisch sind.

Fakt die lokale Äquivalenz $\approx_l$ ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation

Beweis

- Reflexivität, Symmetrie folgen unmittelbar
- Schreibweise $w|_{\Sigma'}$ für den Trace w eingeschränkt auf Symbole aus Σ'
- Transitivität: aus $w_1 \approx_l w_2$, $w_2 \approx_l w_3$ folgt $w_1|_\Gamma = w_2|_\Gamma = w_3|_\Gamma$ und somit $w_1 \approx_l w_3$

Unsichtbare Symbole

Definition Checker C *ignoriert lokale Symbole* gdw.

$s \xrightarrow{a} = \{s\}$ in C für alle lokalen $a \in \Lambda$

(auch “a ist unsichtbar für C”)

Fakt C ignoriere lokale Symbole und $w \approx_l w'$, dann $w \in L(C) \Leftrightarrow w' \in L(C)$

Beweis Sei $w \in L(C)$. Zustandssequenz, die w akzeptiert, akzeptiert auch w' und umgekehrt.

Suche mit Partieller Ordnungs-Reduktion muss also nur für jede Äquivalenzklasse von $\approx_l$ mindestens einen Repräsentanten ablaufen.

Volle Expansion bei Zyklen

Problem

- eine partielle Expansion "verzögert" Ausführung Übergänge anderer A_j
- diese könnten für immer verzögert werden

Lösung

- Zyklus mit nur partiellen Expansionen muss an einer Stelle voll expandiert werden
- lässt sich leicht in Tiefensuche (DFS) einbauen:
  - jeder Zyklus wird durch "Backedge" zu einem Knoten auf Suchstack geschlossen
  - bei einer "Backedge" wird `current` einfach voll expandiert
- Approximation bei BFS: volle Expansion bei Kanten zu Knoten früherer Generation

Partielle Ordnung bei Message Passing Modellen

- Message Passing
  - Kommunikation durch Nachrichtenaustausch über Kanäle/Puffer/FIFO
  - beachte: endliche Modelle haben immer Kanäle endlicher Kapazität
- Unabhängige oder lokale Operationen (2 Prozesse, 1 Kanal):
  - Lesen von einem **nicht vollem** Kanal
  - Schreiben in einen **nicht leeren** Kanal
- Abhängige oder globale Operationen (2 Prozesse, 1 Kanal):
  - Lesen von einem **vollem** Kanal
  - Schreiben in einen **leeren** Kanal

Partielle Ordnung bei Allgemeineren Modellen

- statt Synchronisation durch Aktionen:
  - Synchronisation durch gemeinsame globale Variable
  - und/oder Synchronisation durch Monitore/Semaphoren
  - und/oder Synchronisation durch Nachrichten/Kanäle
- Partielle Ordnungs-Reduktion lässt sich mit folgenden Konzepten anwenden:
  - Unabhängigkeit bzw. Kommutieren von Befehlen
    - Read/Write und Write/Read abängig, Read/Read unabhängig
    - analog für Nachrichten (Read = Receive, Write = Send)
  - Unsichtbarkeit von lokalen Befehlen