Erreichbarkeitsanalyse

Definition Unter *Erreichbarkeitsanalyse* versteht man

- Berechnung aller erreichbaren Zustände
  - Resultat kann explizit oder symbolisch repräsentiert werden
  - wird für weitere Algorithmen oder Optimierung der Systeme benötigt
- Überprüfung, ob gewisse Zustände erreichbar sind
  - entspricht Model Checking von Sicherheitseigenschaften (Safety)

Symbolisch vs Explizit

explizit	=	jeder Zustand/Übergang wird einzeln repräsentiert
symbolisch	=	Mengen-Repräsentation von Zuständen/Übergängen durch Formeln

	Explizites Modell	Symbolisches Modell
Explizite Analyse	Graphensuche	Explicit Model Checking
Symbolische Analyse	—	Symbolic Model Checking

klassisch: Symbolic MC für HW, explicit MC für SW

(Praxis heute: symbolic und explicit für SW+HW)

Symbolisches Modell

- für die Theorie reicht explizite Matrix-Darstellung von T

Anfangszustand: 0

Übergangsmatrix	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0	1	0
3	0	0	0	0	0	1	0	1
4	1	0	0	0	0	0	1	0
5	0	1	0	0	0	0	0	1
6	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	1	0	0	0	0

- in der Praxis ist T in einer Modellierungs- oder Programmiersprache beschrieben

```
initial_state = 0;
next_state = (current_state + 2 * (bit + 1)) % 8;
```

- symbolische Repräsentation kann exponentiell kompakter sein

Symbolische Erreichbarkeitsanalyse

- Symbolische Travesierung des Zustandraumes
  - von einer Menge von Zuständen werden in einem Schritt die Nachfolger bestimmt
  - Nachfolger werden symbolisch berechnet und repräsentiert
  - legt Breitensuche nahe
  - im allgemeinen schon nicht berrechenbar
- Resultat ist eine symbolische Repräsentation aller erreichbaren Zustände
  - z.B. `0 <= state && state < 8 && even (state)`

Parallele Komposition

- symbolische Repräsentation hat oft einen "Paralleloperator"
  - z.B. Produkt von Automaten, der einzelne Automat wird explizit repräsentiert

$$G = K_1 \times K_2$$

  - Komponenten des Systems werden seperat programmiert

```
process A begin P1 end || process B begin P2 end;
```

- Additives Eingehen der Größe der symbolischen Komponenten
  - Programmgrösse des Systems: $|K_1| + |K_2|$, bzw. $|\texttt{P1}| + |\texttt{P2}|$

Zustandsexplosion

- Multiplaktives Eingehen der Anzahl Komponentenzustände in Systemzustandszahl:

$$|S_G| = |S_{K_1}| \cdot |S_{K_2}|$$

- offensichtlich bei sequentieller Hardware:
  - n-Bit Zähler läßt sich mit $O(n)$ Gattern implementieren, hat aber 2^n Zustände
- Hierarchische Beschreibungen führen zu einem weiteren exponentiellen Faktor
- bei Software noch komplexer:
  - in der Theorie nicht primitiv rekursiv (siehe Ackerman-Funktion)
  - in der Praxis ist der Heap (dynamisch allozierte Objekte) das Problem

Explizite vs Symbolische Modellierung

- explizite Repräsentation reduziert sich auf Graphensuche
  - suche erreichbare Zustände von den Anfangszuständen
  - linear in der Grösse **aller** Zustände
- symbolische Modellierung
  - Berechnung der Nachfolger eines Zustandes ist das Hauptproblem
  - **on-the-fly** Expansion von T für einen konkreten erreichten Zustand
  - damit Vermeidung der Berechnung von T für unerreichbare Zustände
  - alternativ symbolische Berechnung/Repräsentation der Nachfolgezustände

Explizite Analyse durch Tiefensuche

- Markiere besuchte Zustände
  - Implementierung abhängig davon, ob Zustände **On-the-fly** generiert werden
- Unmarkierte Nachfolger besuchter Zustände kommen auf den Suchstack
- Nächster zu bearbeitender Zustand wird oben vom Stack genommen
- Falls "Fehlerzustand" erreicht wird hat man einen Weg dorthin
  - der Pfad bzw. Fehlertrace findet sich auf dem Stack
  - der Einfachheit wegen breche die Suche ab

Tiefensuche – Depth First Search (DFS)

```
recursive_dfs_aux (Stack stack, State current)
{
  if (marked (current))
    return;

  mark (current);
  stack.push (current);

  if (is_target (current))
    stack.dump_and_exit ();   /* target reachable */

  forall successors next of current
    recursive_dfs_aux (stack, next);

  stack.pop ();
}
```


Erreichbarkeits-Analyse mit DFS

```
recursive_dfs ()
{
  Stack stack;

  forall initial states state
    recursive_dfs_aux (stack, state);

  /* target not reachable */
}
```

- Abbruch beim Erreichen des Zieles ist schlechter Programmierstil!
- Effizienz verlangt nicht-rekursive Variante
- Markieren sollte durch Hashen ersetzt werden
  - damit Zustände on-the-fly *erzeugt* werden können

Stackoverflow bei Rekursion

```
#include <stdio.h>

void
f (int i)
{
  printf ("%d\n", i);
  f (i + 1);
}

int
main (void)
{
  f (0);
}
```

dieses C-Programm stürzt nach “wenigen” Rekursionsschritten ab

Nicht-Rekursive DFS – Korrekte Version

```
non_recursive_dfs_aux (Stack stack)
{
  while (!stack.empty ())
    {
      current = stack.pop ();
      if (is_target (current))
        dump_family_line_and_exit (current);
      forall successors next of current
        {
          if (cached (next)) continue;
          cache (next);
          stack.push (next);
          next.set_parent (current);
        }
    }
}
```

Vorbereitung Nicht-Rekursive DFS

```
non_recursive_dfs ()
{
  Stack stack;

  forall initial states state
    stack.push (state);

  non_recursive_dfs_aux (stack);

  /* target not reachable */
}
```


DFS – 1. Fehlerhafte Version

```
non_recursive_buggy_dfs_aux (Stack stack)
{
  while (!stack.empty ())
    {
      current = stack.pop ();
      if (is_target (current))
        dump_family_line_and_exit (current);
      if (cached (current)) continue;
      cache (current);
      forall successors next of current
        {
          stack.push (next);
          next.set_parent (current);
        }
    }
}
```


DFS – 2. Fehlerhafte Version

```
non_recursive_but_also_buggy_aux (Stack stack)
{
  while (!stack.empty ())
    {
      current = stack.pop ();
      forall successors next of current
        {
          if (cached (next)) continue;
          cache (next);
          stack.push (next);
          next.set_parent (current);
          if (is_target (next))
            dump_family_line_and_exit (next);
        }
    }
}
```


Breitensuche – Breadth First Search (BFS)

```
bfs_aux (Queue queue)
{
  while (!queue.empty ())
    {
      current = queue.dequeue ();
      if (is_target (current))
        dump_family_line_and_exit (current);
      forall successors next of current
        {
          if (cached (next)) continue;
          cache (next);
          queue.enqueue (next);
          next.set_parent (current);
        }
    }
}
```

Vorbereitung Nicht-Rekursive BFS

```
bfs ()
{
  Queue queue;

  forall initial states state {
    cache (state);
    queue.enqueue (state);
  }

  bfs_aux (queue);

  /* target not reachable */
}
```


DFS versus BFS

- Tiefensuche
  - einfach rekursiv zu implementieren

    (was man aber sowieso nicht sollte)
  - erlaubt Erweiterung auf Zyklenerkennung $\Rightarrow$ Liveness
- Breitensuche
  - erfordert nicht-rekursive Formulierung
  - kürzeste Gegenbeispiele
    - findet immer kürzesten Pfad zum Ziel

Vorwärts- versus Rückwärtstraversierung

- Vorwärtstraversierung bzw. Vorwärtsanalyse
  - Nachfolger sind die als nächstes zu betrachtenden Zustände
  - analysierte Zustände sind alle erreichbar
- Rückwärtstraversierung bzw. Rückwärtsanalyse
  - Vorgänger sind die als nächstes zu betrachtenden Zustände
  - manche untersuchten Zustände können unerreichbar sein
  - meist nur in Kombination mit symbolischen Repräsentationen von Zuständen
  - symbolische Darstellungen bei Rückwärtsanalyse meist “zufällig” und komplex
  - **manchmal terminiert Rückwärtsanalyse in wenigen Schritten**

Globale versus Lokale/On-The-Fly Analyse

- Globale Analyse
  - anwendbar auf Rückwärts- oder Vorwärtstraversierung
  - arbeitet mit *allen* globalen Zuständen (inklusive nicht erreichbaren)
  - Kombination mit expliziter Analyse skaliert sehr schlecht
- Lokale oder On-The-Fly Analyse
  - arbeitet nur auf den erreichbaren Zuständen
  - generiert und analysiert diese on-the-fly ausgehend von Anfangszuständen
- gemischte Vorgehensweise möglich:
  - bestimme vorwärts erreichbare Zustände, darauf dann globale Analysen

Beispiel zu Global versus Lokal


```
process A {
  int count;
  run() {
    while (true)
      if (b.count != this.count)
        count = (count + 1) % (1 << 20);
  }
}

process B {
  int count;
  run() {
    while (true)
      if (a.count == this.count)
        count = (count + 1) % (1 << 20);
  }
}

A a;
B b;
```

Speicherverbrauch

- bei globaler Analyse wird jedem Zustand ein *Markierungsbit* hinzugefügt

```
bool cached (State state) { return state.mark; }
void cache (State state) { state.mark = true; }
```

- bei globaler Analyse **ohne** On-the-fly Zustandsgenerierung
  - $2^{64} = 2^{32} \cdot 2^{32}$ **mögliche** Zustände können nicht vorab alloziert werden
- bei lokaler Analyse **mit** On-the-fly Zustandsgenerierung
  - $2 \cdot 2^{20} = 2097152$ **erreichbare** Zustände
  - ergeben 8-fache Menge an Bytes $\approx$ 16 MB

    (plus Overhead diese zu Speichern, $<$ Faktor 2)

Zustandsspeicherung bei On-The-Fly Expliziter Analyse

- Anforderungen an Datenstruktur zur Speicherung von Zuständen:
  - besuchte Zustände müssen markiert/gespeichert werden (`cache`)

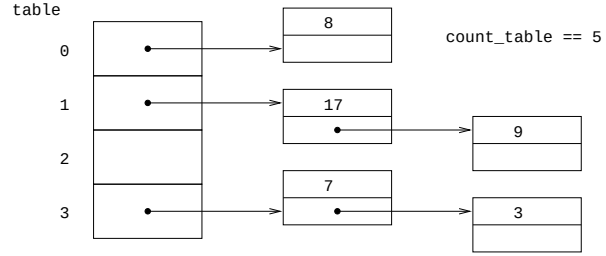
    $\Rightarrow$ pro neuem Zustand eine Einfügeoperation
  - neue Nachfolger werden auf "schon besucht" getestest (`cached`)

    $\Rightarrow$ pro Nachfolger eine Suche auf Enhaltensein
- Alternative Implementierungen:
  - Bit-Set: pro *möglichem* Zustand ein Bit (im Prinzip wie bei globaler Analyse)
  - Suchbäume: Suche/Einfügen logarithmisch in Zustandsanzahl
  - **Hashtabelle**: Suche/Einfügen konstant in Zustandsanzahl

Hashtabellen zur Zustandsspeicherung

- Laufzeit kann als konstant angesehen werden
  - in der Theorie weit komplexere Analyse notwendig
- "gute" Hashfunktion ist das Wesentliche
  - Randomisierung bzw. Verteilung der Eingabebits auf Hashindex
- Anpassung der Grösse der Hashtabelle:
  - entweder durch dynamische (exponentielle) Vergrösserung
  - oder Maximierung und Anpassung an den verfügbaren Speicher

Hashtabelle mit Collision-Chains




```
unsigned hash (unsigned data) { return data; }

struct Bucket *
find (unsigned data)
{
  unsigned h = hash (data);
  h &= (size_table - 1);
  ...
}
```

Schlechte Hashfunktion für Strings in Compilern


```
unsigned
bad_string_hash (const char * str)
{
  const char * p;
  unsigned res;

  res = 0;

  for (p = str; *p; p++)
    res += *p;

  return res;
}
```

Schlechte Hashfunktion für Strings in Compilern


```
unsigned
very_bad_string_hash (const char * str)
{
  const char * p;
  unsigned res;

  res = 0;

  for (p = str; *p; p++)
    res = (res << 4) + *p;

  return res;
}
```

Klassische Hashfunktion für Strings in Compilern

[Dragonbook]

```
unsigned
classic_string_hash (const char *str)
{
  unsigned res, tmp;
  const char *p;

  res = 0;

  for (p = str; *p; p++)
    {
      tmp = res & 0xf0000000;   /* unsigned 32-bit */
      res <<= 4;
      res += *p;
      if (tmp)
        res ^= tmp >> 28;
    }

  return res;
}
```

Analyse der Klassischen Hashfunktion für Strings

- empirisch sehr gute Randomisierung bei Bezeichnern von Programmiersprachen
  - relative Anzahl Kollisionen als Maßzahl für die Qualität
- **schnell**: maximal 4 logisch/arithmetische Operationen pro Zeichen
- bei längeren Strings von 8 Zeichen und mehr gute Bit-Verteilung
- Überlagerung der 8-Bit Kodierungen der einzelnen Zeichen

  (man beachte aber die ASCII Kodierung)
- Klustering bei vielen kurzen Strings (z.B. in automatisch generiertem Code)

  `n1, ..., n99, n100, ..., n1000`

Bessere Hashfunktion für Strings

```
static unsigned primes [] = { 2000000011, 2000000033, ... };
#define NUM_PRIMES  (sizeof (primes) / sizeof (primes[0]))

unsigned
primes_string_hash (const char * str)
{
  unsigned res, i;
  const char * p;

  i = 0;
  res = 0;
  for (p = str; *p; p++)
    {
      res += *p * primes[i++];
      if (i >= NUM_PRIMES)
        i = 0;
    }

  return res;
}
```


Gute Hashfunktion für Zustände

```
static unsigned primes [] = { 2000000011, 2000000033, ... };
#define NUM_PRIMES (sizeof(primes)/sizeof(primes[0]))

unsigned
hash_state (unsigned * state, unsigned words_per_state)
{
  unsigned res, i, j;

  res = 0;
  i = 0;
  for (j = 0; j < words_per_state; j++)
    {
      res += state[j] * primes [i++];
      if (i >= NUM_PRIMES)
        i = 0;
    }

  return res;
}
```


CRC basierte Hashfunktion für Strings

```
#define CRC_POLYNOMIAL 0x82F63B78
static unsigned
crc_hash_bit_by_bit (const char * str)
{
  unsigned const char * p;
  unsigned res = 0;
  int i, bit;
  for (p = str; *p; p++) {
      res ^= *p;
      for (i = 0; i < 8; i++) {
          bit = res & 1;
          res >>= 1;
          if (bit)
            res ^= CRC_POLYNOMIAL;
        }
    }
  return res;
}
```

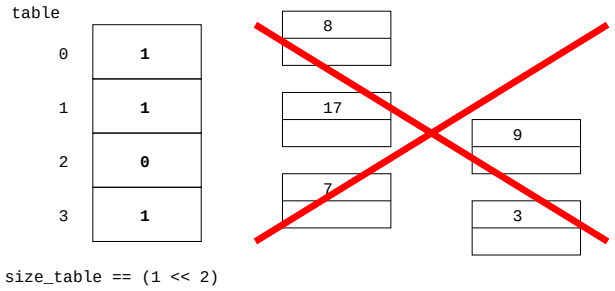
Analyse der Hashfunktion für Zustände

- lässt sich leicht parametrisieren
  - durch verschiedene Primzahlen oder Anfangspositionen
- heutzutage ist Integer-Multiplikation sehr schnell
  - durch mehr Platz für die Multiplizierer auf der ALU
  - und durch Vorhandensein mehrerer Integer-Functional Units
- was noch fehlt ist Anpassung an Tabellengröße
  - bei Zweierpotenzgröße: einfache Maskierung
  - sonst Primzahlgröße und Anpassung durch Modulo-Bildung

Super-Trace Algorithmus

- Probleme mit expliziter **vollständiger** Zustandsraum-Exploration:
  1. wegen Zustandsexplosion oft zu viele Zustände
  2. ein einziger Zustand braucht oft schon viel Platz (dutzende Bytes)
- Ideen des Super-Trace Algorithmus:
  1. behandle Zustände mit demselben Hash-Wert als identisch
  2. speichere nicht die Zustände, sondern Hash-Werte erreichter Zustände
- Super-Trace wird auch **Bit-State-Hashing** genannt

Super-Trace Hashtabelle als Bit-Set



Falls Zustand mit gleichem Hash-Wert früher schon besucht wurde, dann gilt momentaner Zustand als besucht!

Analyse des Super-Trace Algorithmus

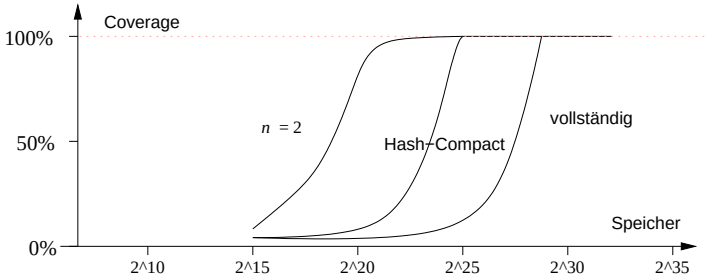
- Vorteile:
  - drastische Reduktion des Speicherplatzes auf ein Bit pro Zustand
  - Reduktion um mindestens 8 mal Größe des Zustandes in Bytes
  - Anpassung der Größe der Hash-Tabelle/Bit-Set an vorhandenen Speicher
  - Ausgabe einer unteren Schranke der Anzahl besuchten Zustände
  - Parametrisierung der Hash-Funktion erlaubt unterschiedliche Exploration
- Nachteile:
  - bei nicht-kollisionsfreier Hash-Funktion (der Normalfall) Verlust der Vollständigkeit
  - nur vage Aussage über Abdeckung möglich

Zwei Hashfunktionen beim Supertrace

- berechne zwei Hashwerte mit unterschiedlichen Hashfunktionen
  - Speichern von Zuständen durch Eintrag jeweils eines Bits in zwei Hashtabellen
  - Zustand wird als schon erreicht angenommen gdw. beide Bits gesetzt
  - z.B. $h_1, h_2 : Keys \rightarrow \{0, \ldots, 2^{32} - 1\}$
  - zwei Hashtabellen mit jeweils 2^{32} Bits = 2^{29} Bytes = 512 MB
- lässt sich auch leicht auf n Hashfunktionen ausbauen
  - $n = 4$ mit 2 GB Speicher für Hashtabellen ist durchaus realistisch
  - vergl. Parameteriesierung der Hashfunktion basierend auf Primzahlmultiplikation

Hash-Compact

- statt n Bits zu setzen kann man auch einfach den n-Bit Hash-Wert speichern
  - bei 256 MB = 2^{28} Bytes Platz für die Hashtabelle bis zu 2^{26} Hashwerte/Zustände
    (32-Bit Hashfunktion $h : Keys \rightarrow \{0, \ldots, 2^{32} - 1\}$, 4 Bytes Hashwert pro Zustand)
- beliebige Varianten ergeben ungefähr folgendes Bild:



(schematisch nach [Holzmann 1998], 427567 erreichbare Zustände, 1376 Bits)

Best-Case-Analyse des Speicher-Verbrauchs

- Idealisierte Best-Case Annahmen:
  - verwendete Hash-Funktion ist möglichst kollisionsfrei
  - Hashtabelle wird solange wie möglich ohne Kollisionen gefüllt
- m Speicherplatz in Bits, s Zustandsgrösse in Bits, r erreichbare Zustände

$$coverage_{n=2}(m) = \frac{m}{r \cdot 2}$$

$$coverage_{\text{hashcompact}}(m) = \frac{m}{r \cdot w} \quad w = \text{Wordgröße in Bits, z.B. 32 Bit}, w \leq \lceil \log_2 r \rceil$$

$$coverage_{\text{complete}}(m) = \frac{m}{r \cdot s}$$

(im vorigen Schaubild ist die x-Achse logarithmisch dargestellt)

- in der Praxis gibt es Kollisionen und die unvollständigen brauchen mehr Speicher